

E-76/4

GEKRÜMMTE BRETTSCHICHTTRÄGER
MIT KONSTANTER QUERSCHNITTSHÖHE
ODER MIT GENEIGTEM OBERGURT

GEKRUEMMTE BRETTSCHICHTTRAEGER
MIT KONSTANTER QUERSCHNITTSHOEHE ODER MIT GENEIGTEM OBERGURT

Untersuchungen

durchgeführt im Auftrage der Entwicklungsgemeinschaft Holzbau in der
Deutschen Gesellschaft für Holzforschung e. V.

von

Karl Möhler und Hermann Blumer

Lehrstuhl für Ingenieurholzbau und Baukonstruktionen

Universität Karlsruhe (TH)

1978

Theoretische Untersuchungen und Auswertung von Biegeversuchen mit gekrümmten Brettschichträgern mit konstanter und veränderlicher Querschnittshöhe (Satteldachträger)

von

K. Möhler und H. Blumer

Einleitung :

Träger aus Brettschichtholz werden in zunehmendem Maße im Holzbau angewendet, wobei in der Regel rechteckige Querschnitte bevorzugt werden. Für Dachkonstruktionen hat man schon frühzeitig neben den geraden parallelgurtigen Biegeträgern und den meist weitgespannten Bogenträgern mit verhältnismäßig großen Krümmungshalbmessern Träger- und Rahmenformen ausgeführt, bei denen - zumindest auf eine gewisse Länge - stärkere Krümmungen bei konstanter oder veränderlicher Querschnittshöhe vorkommen. Dies ist vor allem bei Rahmenecken und im Firstbereich von Satteldachträgern der Fall. Bei bestimmten Trägerformen traten nicht nur in der Bundesrepublik Deutschland wiederholt auch bei einwandfreier Leimung Rißschäden im Bereich stärkerer Krümmungen und auch bei Satteldachträgern mit geradem Untergurt im Firstbereich auf, die auf Querspannungen zurückzuführen waren. Die vorwiegend bei Satteldachträgern mit oder ohne Ausrundung der Unterkante im Firstbereich aufgetretenen Schäden ließen erkennen, daß bei diesen Trägerformen die Querspannungen eine besondere Rolle spielen. Es war daher naheliegend, daß man sich an mehreren Stellen mit theoretischen und versuchstechnischen Untersuchungen der bei diesen Trägerformen auftretenden Spannungen befaßte. In erster Linie behandelte man gekrümmte Biegeträger mit konstanter Höhe (Heimeshoff 1967 und Schelling 1967), wobei man die Querspannungen für isotropes Material ermittelte. Buchmann (1969) legte seinen theoretischen Überlegungen einen anisotropen Baustoff mit den für Brettschichtholz üblichen Materialkennwerten zugrunde. Seine Ergebnisse fanden in DIN 1052, Teil 1, Ausgabe Oktober 1969 in den Gl.(39) und (40) ihren Niederschlag. Im Rahmen einer Forschungs-

arbeit, die am Lehrstuhl für Ingenieurholzbau und Baukonstruktionen der Universität Karlsruhe durchgeführt wurde (Möhler/Blumer 1974) hat Blumer die für die einzelnen Tragwerksformen maßgebenden Scheibengleichungen aufgestellt und sie für die Längs-, Quer- und Schubspannungen für die Schnittkräfte M , N und Q ausgewertet. Dabei hat er auch den Einfluß der Anisotropie gegenüber isotropem Material festgestellt und unter Berücksichtigung der Anisotropie des Holzes mit den für europäisches Nadelholz (Fichte) zutreffenden Materialkennwerten die für die Bemessung maßgebenden Maximalwerte der Quer-, Längs- und Schubspannungen ermittelt. Etwa gleichzeitig in Canada durchgeführte Arbeiten von Fox und Foschi, die aber nur den durch Biegemomente hervorgerufenen Spannungszustand bei Satteldachträgern untersuchten, brachten weitgehende Uebereinstimmung mit den theoretischen Werten von Blumer. Die festgestellten Abweichungen erschienen in erster Linie von den unterschiedlichen Anisotropiewerten herzurühren, da die überseeischen Nadelhölzer quer zur Faser einen höheren Elastizitätsmodul im Verhältnis zum Längsmodul aufweisen als europäisches Nadelholz. Zur Ueberprüfung inwieweit die rechnerisch gewonnenen Ergebnisse der praktischen Bemessung von gekrümmten Trägern mit konstanter und veränderlicher Querschnittshöhe zugrundegelegt werden können und ob die zulässige Querspannung von $2,5 \text{ N/mm}^2$, die nach DIN 1052, Teil 1 für gekrümmte Brettschichtträger angegeben ist, für die verschiedene Trägerformen auch weiterhin angewendet werden kann, sollten die in Karlsruhe und Stuttgart an praxisnahen Ausführungen erzielten Versuchsergebnissen ausgewertet werden. Schließlich sollten Hinweise für die praktische Berechnung, wie sie in einer Berechnungsnorm aufgenommen werden können, und Vorschläge für die Festlegung der zulässigen Querspannung gemacht werden.

1. SPANNUNGSBERECHNUNGEN AN ANISOTROPEN KREISBOGENSCHEIBEN UND SATTELTRÄGERN KONSTANTER DICKE

1.1. Einleitung

Um die zweidimensionalen Spannungen, die in gekrümmten Balken und Balken mit veränderlicher Querschnittshöhe bei Biegung, Normal- und Querkraftbeanspruchung entstehen, theoretisch nachweisen zu können und um Bemessungsrichtlinien aufzustellen, wurden Berechnungen mit Hilfe der orthotropen Scheibentheorie durchgeführt. Der Inhomogenität des Holzes kann dadurch Rechnung getragen werden, daß in den orthogonalen Richtungen die Materialkennwerte unterschiedlich eingesetzt werden. Dadurch kann eine gute Uebereinstimmung mit den effektiv auftretenden Verhältnissen gefunden werden.

1.2. Grundlagen

1.2.1. Allgemeine Betrachtungen und Voraussetzungen

In den vorliegenden theoretischen Untersuchungen sollen die Spannungsermittlungen der verschiedenen Belastungsarten und Scheibenformen mit rechteckigem Querschnitt nach der Elastizitätstheorie durchgeführt werden. Der Grad der Orthotropie, der durch $s = \sqrt{E_x/E_y}$, bzw. $s = \sqrt{E_\varphi/E_r}$ und $k = \sqrt{E_x/G_{xy}}$, bzw. $k = \sqrt{E_\varphi/G_{r\varphi}}$ definiert wird, findet durch die Spannungs-Dehnungsbeziehungen Eingang in die Rechnung.

Es bedeuten:	E_x, E_y :	Elastizitätsmoduln in Richtung der Koordinatenachsen x und y
	G_{xy} :	Schubmodul im x-y Koordinatensystem
	E_φ, E_r :	Elastizitätsmoduln in tangentialer und radialer Richtung im Polarkoordinatensystem
	$G_{r\varphi}$:	Schubmodul im Polarkoordinatensystem
	μ_x, μ_φ :	Querdehnungszeichen im x-y Koordinatensystem und im Polarkoordinatensystem

a) Die polarorthotrope Kreisbogenscheibe mit Momenten-, Normalkraft- und Querkraftbelastung

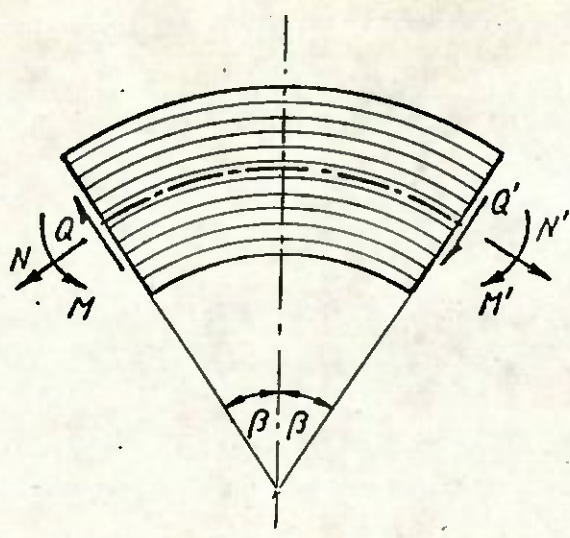


Bild 1: Anwendungsbeispiele: Gekrümmter Biegeträger, Bogenträger, Rahmenecke

b) Die axialsymmetrische polarorthotrope Scheibe mit kreisförmig gekrümmtem inneren und geneigtem äusseren Rand mit Momenten-, Normalkraft- und Querkraftbelastung.

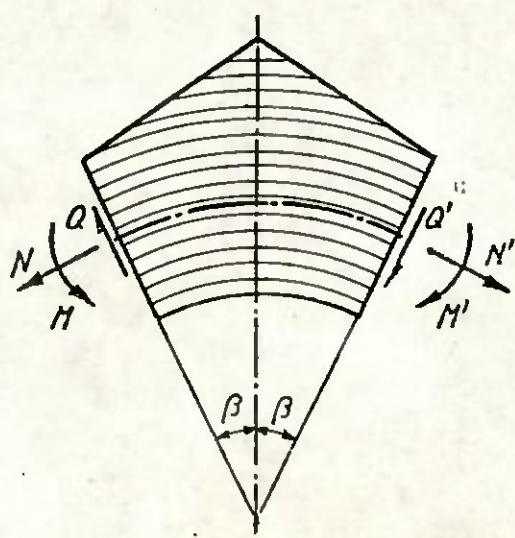


Bild 2: Anwendungsbeispiele: Gekrümmter Sattelträger, Rahmenecke

c) Die axialsymmetrische orthotrope Scheibe mit geradem unteren und geneigtem oberem Rand mit Momenten-, Normalkraft- und Querkraftbelastung.

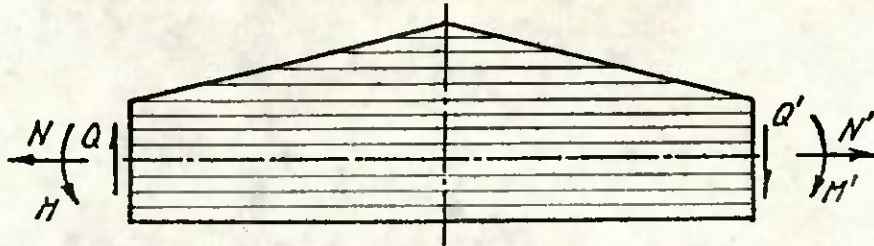


Bild 3: Anwendungsbeispiel: Gerader Sattelträger

Die betrachteten Scheiben sind Teile aus Balken mit wesentlich grösseren Längsabmessungen. Sie sollen durch Endquerschnitte begrenzt sein, an denen sie durch die auftretenden Schnittkräfte belastet werden. An den Schnitten werden für die Verformungen keine Randbedingungen aufgestellt, sondern lediglich die Resultierenden der Spannungen als Schnittgrössen M , N , Q vorgegeben. Die Lösungsergebnisse sind nur dann streng richtig, wenn der aus der Rechnung an den Endquerschnitten sich ergebende Spannungsverlauf zufällig mit dem Spannungsverlauf der angrenzenden Teile übereinstimmt. Sonst liegen hier Randstörungen vor, deren Einfluss sich aber nach dem Prinzip von St.-Venant nur über einen begrenzten Teil erstreckt. Unter orthotropen Scheiben versteht man solche, bei denen die elastischen Hauptachsen parallel zu den Koordinatenachsen verlaufen. In den polarorthotropen Scheiben folgen die elastischen Hauptachsen den Polarkoordinaten.

Es sollen folgende Voraussetzungen gelten:

- a) Die Scheiben bestehen aus einem gleichmässig orthotropen Werkstoff
- b) Sie sind dünn und nach ihrer Dicke ungehindert verformbar.
- c) Die Formänderungen bleiben klein.
- d) Die Formänderungen gehorchen dem Hooke'schen Gesetz.
- e) Die Scheiben sind gewichtslos, frei von Vorspannungen und nur durch die äusseren Schnittkräfte, welche in der Scheibenmittelebene wirken, beansprucht.
- f) Der betrachtete Bereich sei frei von Randstörungen.

Hiernach folgt:

- aus b) Es herrscht ein ebener Spannungszustand. Die Spannungskomponenten σ_z , τ_{zx} , τ_{zy} , bzw. σ_z , $\tau_{z\varphi}$, τ_{zr} verschwinden. Die verbleibenden Spannungen und Verformungen stellen Mittelwerte über die Scheibendicke dar und sind umso genauer je dünner die Scheibe ist. Da in der z - Richtung (senkrecht zur Scheibenebene) keine Spannungen auftreten, kommt auch eine etwaige Anisotropie nicht zur Auswirkung.
- aus c) Die geometrischen Beziehungen können unter Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung angeschrieben werden.
- aus d) Die Formänderungen sind rein elastisch, wegen der Linearität dürfen Spannungen und Verschiebungen aus verschiedenen Belastungszuständen überlagert werden.

1.2.2. Die Scheibengleichung im karthesischen Koordinatensystem

Die homogene Differentialgleichung für die orthotrope Scheibe lautet mit den Voraussetzungen nach Abschnitt 1.2.1 und Einführung der Airy'schen Spannungsfunktion F:

$$s^2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + (k^2 - 2\mu_x) \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0 \quad (1)$$

Der Lösungsansatz für die Spannungsfunktion F kann allgemein wie folgt gewählt werden:

$$F(x,y) = \sum_{i=1}^{i=j} [A_{i1} \cdot \text{Cosh}(\lambda_1 \omega_i y) + A_{i2} \cdot \text{Cosh}(\lambda_2 \omega_i y) + A_{i3} \cdot \text{Sinh}(\lambda_1 \omega_i y) + A_{i4} \cdot \text{Sinh}(\lambda_2 \omega_i y)] \cdot \cos(\omega_i x) \quad (2)$$

mit

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{(k^2 - 2\mu_x)}{2} + \sqrt{\frac{(k^2 - 2\mu_x)^2}{4} - s^2}}$$

$$\lambda_2 = \sqrt{\frac{(k^2 - 2\mu_x)}{2} - \sqrt{\frac{(k^2 - 2\mu_x)^2}{4} - s^2}}$$

und $\omega_i = \frac{\pi \cdot i}{l}$; l = halbe Scheibenlänge

Die Spannungen erhält man schliesslich zu:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} ; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} ; \quad \tau_{xy} = - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \quad (3)$$

1.2.3. Die Scheibengleichung im Polarkoordinatensystem

Die homogene Differentialgleichung für die orthotrope Scheibe lautet:

$$\frac{\partial^4 F}{\partial r^4} + \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial^3 F}{\partial r^3} - \frac{s^2}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{s^2}{r^3} \cdot \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{s^2}{r^4} \frac{\partial^4 F}{\partial \varphi^4} + \frac{k^2 - 2\mu\varphi}{r^2} \frac{\partial^4 F}{\partial \varphi^2 \partial r^2} - \frac{k^2 - 2\mu\varphi}{r^3} \frac{\partial^3 F}{\partial \varphi^2 \partial r} + \frac{k^2 + 2s^2 - 2\mu\varphi}{r^4} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (4)$$

Den Lösungsansatz für die Spannungsfunktion F erhält man zu:

$$F(r, \varphi) = \sum_{i=0}^{i=j} \left(A_{i1} \cdot r^{m_{i1}} + A_{i2} \cdot r^{m_{i2}} + A_{i3} \cdot r^{m_{i3}} + A_{i4} \cdot r^{m_{i4}} \right) \cos(\alpha_i \varphi) \quad (5)$$

mit den Abkürzungen

$$m_{i1} = 1 + \sqrt{q_i^2 + \sqrt{q_i^4 - s^2(\alpha_i^2 - 1)^2}}$$

$$m_{i2} = 1 + \sqrt{q_i^2 - \sqrt{q_i^4 - s^2(\alpha_i^2 - 1)^2}}$$

$$m_{i3} = 1 - \sqrt{q_i^2 + \sqrt{q_i^4 - s^2(\alpha_i^2 - 1)^2}}$$

$$m_{i4} = 1 - \sqrt{q_i^2 - \sqrt{q_i^4 - s^2(\alpha_i^2 - 1)^2}}$$

und $\alpha_i = \frac{\pi \cdot i}{\beta}$; $\beta =$ halber Zentriwinkel

Die Spannungen ergeben sich zu:

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2}$$

$$\sigma_\varphi = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}$$

$$\tilde{\tau}_{r\varphi} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial F}{\partial \varphi} \right)$$

(6)

1.3. Die polarorthotrope Kreisbogenscheibe mit Momenten-, Normalkraft- und Querkraftbelastung

1.3.1. Grundlastfälle

Es ist zweckmässig, wenn man den allgemeinen Belastungsfall M, N, Q in die folgenden Grundlastfälle aufspaltet (Bild 4).

Grundlastfall a) Reine Biegung M .

Grundlastfall b) Querkraft Q . Ein Endquerschnitt wird mit Q belastet, $M = N = 0$ (Kragarm mit Querkraft - Einzelbelast).

Grundlastfall c) Normalkraft N . An einem Endquerschnitt greift nur die Normalkraft N an. $M = Q = 0$ (Kragarm mit Normalkraft - Einzellast).

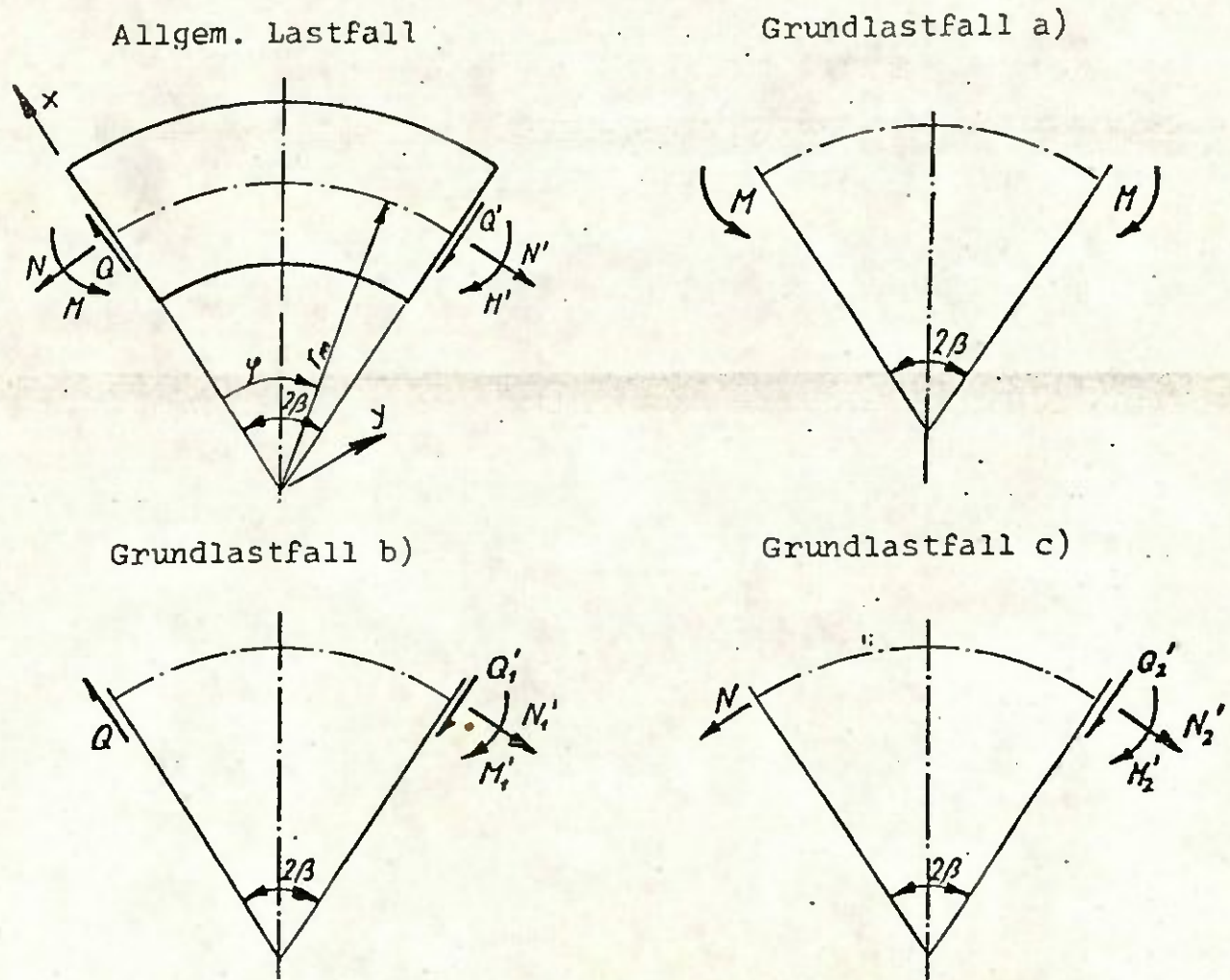


Bild 4

1.3.2. Spannungszustand für den Grundlastfall: Reine Biegung

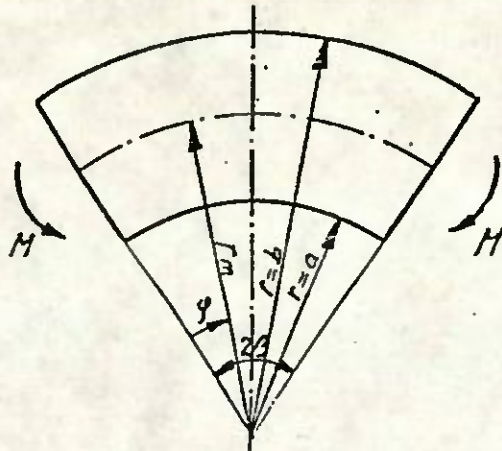
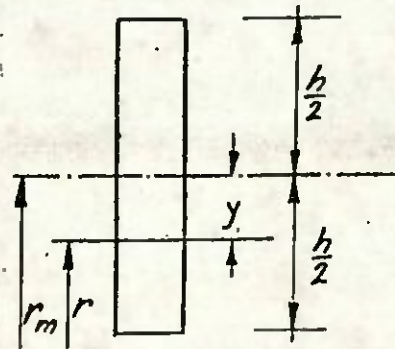


Bild 5

Dieser Belastungsfall ist drehsymmetrisch, das heisst: Die Verschiebungen und Spannungen sind vom Winkel φ unabhängig. An den Rändern $\varphi = 0$ und $\varphi = 2\beta$ greifen die äusseren Momente M in der Mittelebene der Scheibe an. Die Lösung dieses Problems finden wir bei Buchmann.

Wir beschränken uns auf die Wiedergabe der Spannungen. Sie lauten mit den Abkürzungen:

Bild 6



$$\alpha = \frac{h}{2r_m}$$

$$\eta = \frac{y}{h}$$

$$\sigma_r = -\frac{M}{r_m F} \cdot \frac{4\alpha(1-s^2)}{N_1} \cdot \left\{ \left[\frac{(1+\alpha)^{s+1} - (1-\alpha)^{s+1}}{(1-2\alpha\eta)^{s-1}} - \left[\frac{(1-\alpha)^{2s}(1+\alpha)^{s+1}}{(1-2\alpha\eta)^{s+1}} - \frac{(1-\alpha)^{s+1}(1+\alpha)^{2s}}{(1-2\alpha\eta)^{s+1}} \right] \right] \right\} \quad (7)$$

$$\sigma_\varphi = -\frac{M}{W} \cdot \frac{4\alpha^2(1-s^2)}{3N_1} \cdot \left\{ s \left[\frac{(1+\alpha)^{s+1} - (1-\alpha)^{s+1}}{(1-2\alpha\eta)^{s-1}} + s \left[\frac{(1-\alpha)^{2s}(1+\alpha)^{s+1}}{(1-2\alpha\eta)^{s+1}} - \frac{(1-\alpha)^{s+1}(1+\alpha)^{2s}}{(1-2\alpha\eta)^{s+1}} \right] \right] \right\} \quad (8)$$

wobei

$$N_1 = (1-s)^2 \left[(1-\alpha)^{2s+2} + (1+\alpha)^{2s+2} \right] - (1+s)^2 \left[(1-\alpha)^2(1+\alpha)^{2s} + (1-\alpha)^{2s}(1+\alpha)^2 \right] + 8s(1-\alpha^2)^{s+1}$$

1.3.3. Spannungszustand für den Grundlastfall: Querkraft

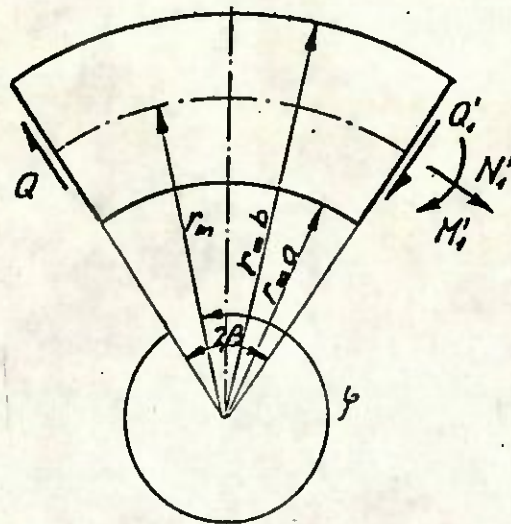


Bild 7

Am Rande $\varphi = 0$ des in Bild 7 dargestellten Trägers greift in der Scheibenebene die äußere Kraft Q an. Im Gegensatz zu dem in Abschnitt 1.3.2 behandelten Fall der Drehsymmetrie sind in dem nun folgenden Fall die Spannungen und Verschiebungen vom Winkel φ abhängig. Als Lösungsansatz der Scheibengleichung (4) verwenden wir die Spannungsfunktion

$$F_1 = (A_{11} \cdot r + A_{12} \cdot r \cdot \ln r + A_{13} \cdot r^{1+n} + A_{14} \cdot r^{1-n}) \sin \varphi \quad (9)$$

mit
$$n = \sqrt{1 + s^2 + k^2 - 2\mu_\varphi}$$

Mit Berücksichtigung der Randbedingungen (Gleichgewicht der Spannungen mit den angreifenden äußeren Lasten in den Endquerschnitten und Verschwinden der Radial- und Tangentialspannungen an den gekrümmten Rändern) erhält man die Spannungskomponenten:

$$\sigma_r = \frac{Q}{F} \cdot \frac{\alpha \cdot n}{U_1} \left[(1-2\alpha\eta)^{n-1} + (1-\alpha)^n (1+\alpha)^n (1-2\alpha\eta)^{-n-1} - \frac{(1-\alpha)^n + (1+\alpha)^n}{(1-2\alpha\eta)} \right] \sin \varphi \quad (10)$$

$$\sigma_\varphi = \frac{Q}{F} \cdot \frac{\alpha \cdot n}{U_1} \left[(1+n)(1-2\alpha\eta)^{n-1} + (1-n)(1-\alpha)^n (1+\alpha)^n (1-2\alpha\eta)^{-n-1} - \frac{(1-\alpha)^n + (1+\alpha)^n}{(1-2\alpha\eta)} \right] \sin \varphi \quad (11)$$

$$\tau_{r\varphi} = -\frac{Q}{F} \cdot \frac{\alpha \cdot n}{U_1} \left[(1-2\alpha\eta)^{n-1} + (1-\alpha)^n (1+\alpha)^n (1-2\alpha\eta)^{-n-1} - \frac{(1-\alpha)^n + (1+\alpha)^n}{(1-2\alpha\eta)} \right] \cos \varphi \quad (12)$$

mit

$$U_1 = (1-\alpha)^n - (1+\alpha)^n + \frac{n}{2} [(1-\alpha)^n + (1+\alpha)^n] \ln \frac{1+\alpha}{1-\alpha}$$

1.3.4. Spannungszustand für den Grundlastfall: Normalkraft

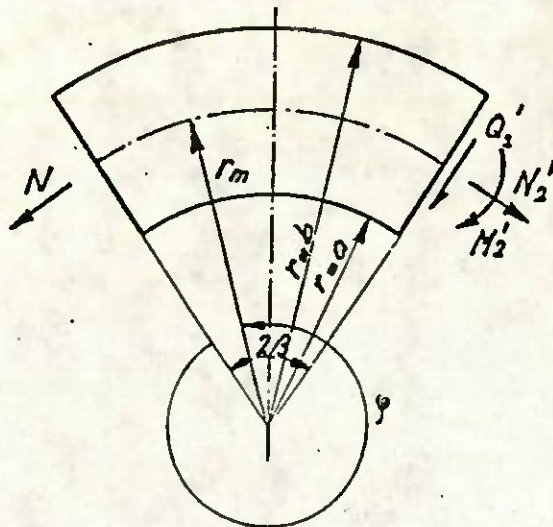


Bild 8

Wir zerlegen diesen Fall in zwei Teilbelastungen:

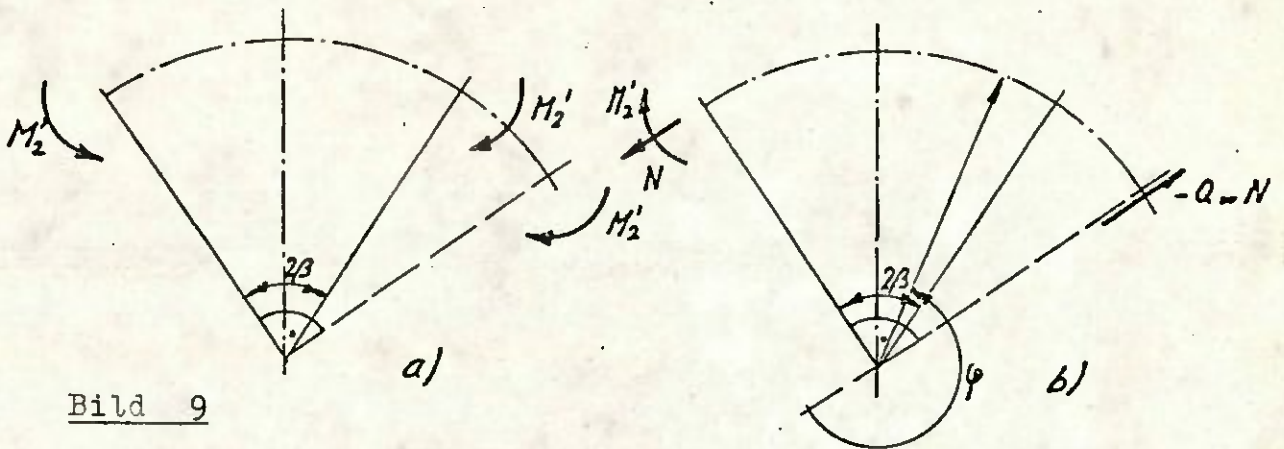


Bild 9

Die erste Teilbelastung, reine Biegung (M_2'), ist gemäß Abschnitt 1.3.2 zu behandeln. Für den Spannungszustand zur zweiten Teilbelastung muß lediglich in den Formeln für den Lastfall Querkraft nach Abschnitt 1.3.3 der Winkel φ durch $\varphi' = \varphi - \frac{\pi}{2}$ ersetzt werden. Daraus ergibt sich:

$$\sigma_r = -\frac{N}{F} \cdot \alpha \left\{ \frac{8(1-s^2)}{N_1} \left[\frac{((1+\alpha)^{s+1} - (1-\alpha)^{s+1})}{(1-2\alpha\eta)^{s-1}} - \frac{((1-\alpha)^{2s}(1+\alpha)^{s+1} - (1-\alpha)^{s+1}(1+\alpha)^{2s})}{(1-2\alpha\eta)^{s+1}} - \frac{((1+\alpha)^{2s} - (1-\alpha)^{2s})}{(1-2\alpha\eta)^{s+1}} \right] + \frac{n}{U_1} \left[\frac{1}{(1-2\alpha\eta)^{n-1}} + \frac{(1-\alpha)^n(1+\alpha)^n}{(1-2\alpha\eta)^{n-1}} - \frac{(1-\alpha)^n + (1+\alpha)^n}{(1-2\alpha\eta)} \right] \cos \varphi \right\} \quad (13)$$

$$\sigma_{\varphi} = -\frac{N}{F} \cdot \alpha \left\{ \frac{4(1-s^2)}{N_1} \left[s \left((1+\alpha)^{s+1} - (1-\alpha)^{s+1} \right) / (1-2\alpha\eta)^{s-1} + \left((1-\alpha)^{2s} (1+\alpha)^{s+1} - (1-\alpha)^{s+1} (1+\alpha)^{2s} \right) \frac{1}{(1-2\alpha\eta)^{s+1}} - \left((1+\alpha)^{2s} - (1-\alpha)^{2s} \right) \right] + \frac{n}{U_1} \left[(1+n) (1-2\alpha\eta)^{n-1} + (1-n) (1-\alpha)^n (1+\alpha)^n (1-2\alpha\eta)^{-n-1} - \frac{(1-\alpha)^n + (1+\alpha)^n}{(1-2\alpha\eta)} \right] \cos \varphi \right\} \quad (14)$$

$$\tau_{r\varphi} = -\frac{N}{F} \cdot \alpha \frac{n}{U_1} \left[(1-2\alpha\eta)^{n-1} + (1-\alpha)^n (1+\alpha)^n (1-2\alpha\eta)^{-n-1} - \frac{(1-\alpha)^n + (1+\alpha)^n}{(1-2\alpha\eta)} \right] \sin \varphi \quad (15)$$

mit $n = \sqrt{1 + s^2 + k^2 - 2\mu_{\varphi}}$

$$N_1 = (1-s)^2 \left[(1-\alpha)^{2s+2} + (1+\alpha)^{2s+2} \right] - (1+s)^2 \left[(1-\alpha)^2 (1+\alpha)^{2s} + (1-\alpha)^{2s} (1+\alpha)^2 \right] + 8s (1-\alpha^2)^{s+1}$$

$$U_1 = (1-\alpha)^n - (1+\alpha)^n + \frac{n}{2} \left[(1-\alpha)^n + (1+\alpha)^n \right] \ln \frac{1+\alpha}{1-\alpha}$$

1.4. Die axialsymmetrische polarorthotrope Scheibe mit kreisförmig gekrümmtem inneren und geneigtem äusseren Rand

1.4.1. Grundlastfälle

Die in Bild 10 dargestellte Scheibe ist in bezug auf die ξ -Achse symmetrisch. An den Endquerschnitten greifen die äusseren Schnittkräfte in der Ebene der Scheibe an. Um die Symmetrieeigenschaften bezüglich der Eckdiagonalen auszunützen, wird der allgemeine Belastungsfall in die drei symmetrischen bzw. antimetrischen Grundlastfälle aufgespaltet (Swelem, 1967).

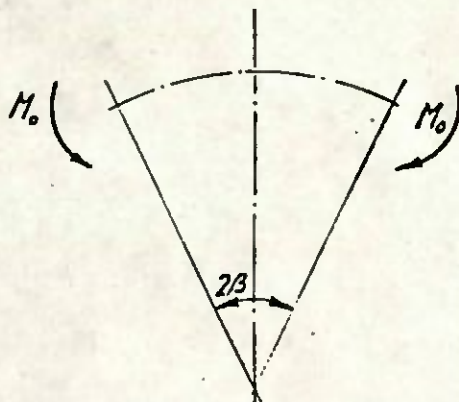
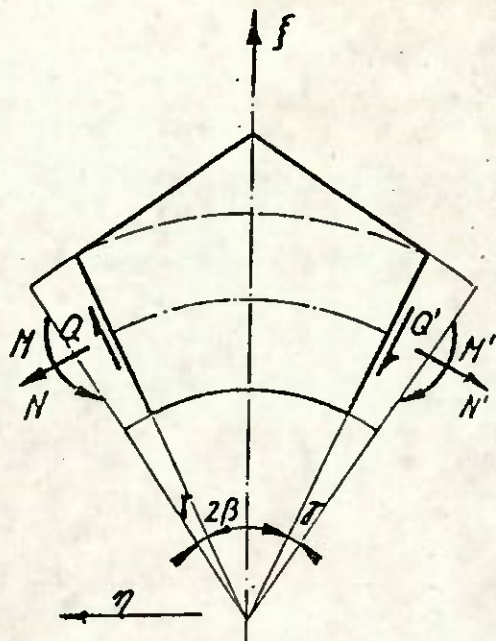
Grundlastfall a): Reine Biegung

Grundlastfall b): Normal-, Querkraft und Biegung symmetrisch zur Eckdiagonalen. Die Resultierende liegt im Krümmungsmittelpunkt $r = 0$ normal zum Eckdiagonalquerschnitt.

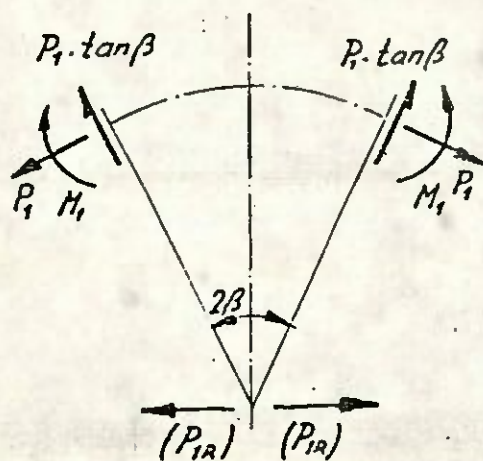
Grundlastfall c): Normal-, Querkraft und Biegung antimetrisch zur Eckdiagonalen. Die Resultierende liegt im Eckdiagonalquerschnitt.

Allgem. Lastfall

Grundlastfall a)



Grundlastfall b)



Grundlastfall c)

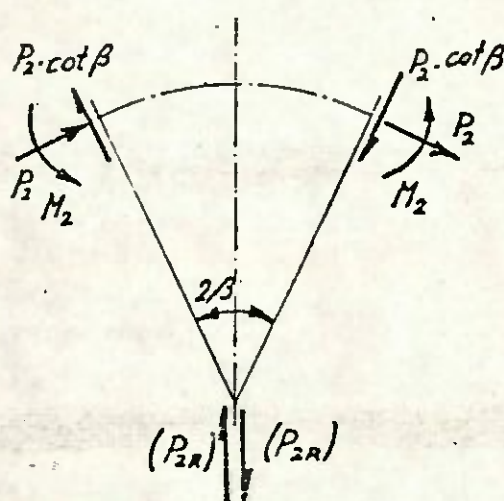


Bild 10

Nach Bild 10 müssen folgende Gleichgewichtsbedingungen erfüllt sein:

$$\sum P_f = 0 \quad (Q - Q') \cos \beta = (N + N') \sin \beta$$

$$\sum P_\eta = 0 \quad (Q + Q') \sin \beta = -(N - N') \cos \beta$$

$$\sum M = 0 \quad M - M' = -(N - N') r_m$$

$$P_{1R} = \frac{P_1}{\cos \beta}, \quad M_1 = P_{1R} \cdot r_m \cdot \cos \beta = P_1 \cdot r_m$$

$$P_{2R} = \frac{P_2}{\sin \beta}, \quad M_2 = P_{2R} \cdot r_m \cdot \sin \beta = P_2 \cdot r_m$$

Zwischen den Schnittgrößen des allgemeinen Lastfalles und denen der Grundlastfälle ergeben sich folgende Beziehungen:

$$P_1 - P_2 = N$$

$$P_1 \cdot \tan \beta + P_2 \cdot \cot \beta = Q$$

$$M_0 - M_1 + M_2 = M_0 - r_m \cdot (P_1 - P_2) = M_0 - N \cdot r_m = M$$

daraus erhält man:

$$P_1 (1 + \tan^2 \beta) = N + Q \cdot \tan \beta$$

$$P_1 = \frac{N + Q \cdot \tan \beta}{1 + \tan^2 \beta} = N \cdot \cos^2 \beta + Q \sin \beta \cdot \cos \beta$$

$$= \frac{1}{2} [N (\cos 2\beta + 1) + Q \sin 2\beta]$$

$$P_2 = P_1 - N = \frac{1}{2} [N (\cos 2\beta - 1) + Q \sin 2\beta]$$

$$M_0 = M + N \cdot r_m$$

Die Zusammenfassung der Grundlastfälle a) und b) für $M_0 = M_1$ ergibt den Lastfall symmetrische Quer- und Normalkraftbelastung ohne äusseres Biegemoment. Die Zusammenfassung von b) und c) für $P_1 = P_2$ ergibt den Lastfall Querkraftbelastung analog Bild 4 b). Aus a), b) und c) für $P_2 = -P_1 \tan^2 \beta$ und $M_0 = P_1 \cdot r_m (1 + \tan^2 \beta)$ erhält man den Lastfall Normalkraft analog Bild 4 c).

1.4.2. Reine Biegung

Für den Lastfall reine Biegung wird der Koordinatenursprung $\varphi = 0$ in die Eckdiagonale gelegt.

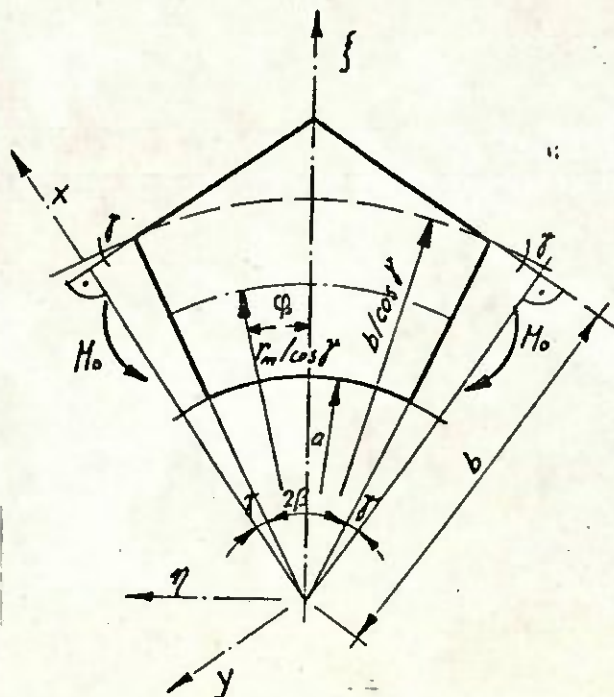


Bild 11

1.4.2.1. Spannungsfunktion

Wir machen folgenden Ansatz für die Spannungsfunktion nach Abschnitt 1.2.3.

$$F = A_{01}' + A_{02}' r^{1+s} + A_{03}' r^{1-s} + A_{04}' r^2 + \sum_{i=1}^{i=j} \left(\sum_{k=1}^{k=4} A_{ik}' r^{mik} \right) \cos \alpha_i \varphi$$

mit $\alpha_i = \frac{\pi \cdot i}{(\gamma + \beta)}$ und $i = 1, 2, 3, \dots, j$ (16)

1.4.2.2. Spannungskomponenten

Die Spannungskomponenten erhält man aus den Ableitungen (Gleichungen (6)) der Spannungsfunktion (16).

Mit Berücksichtigung der Abkürzungen:

$$A_{02} = A_{02}' b^{(s-1)}$$

$$A_{03} = A_{03}' b^{-(s+1)}$$

$$A_{04} = A_{04}'$$

$$A_{ik} = A_{ik}' b^{mik-2}$$

und mit $\varrho = \frac{b}{r}$ ergeben sich die Spannungskomponenten zu:

$$\sigma_r = A_{02} (1+s) \varrho^{1-s} + A_{03} (1-s) \varrho^{1+s} + 2 A_{04} + \sum_{i=1}^{i=j} \left[\sum_{k=1}^{k=4} A_{ik} (mik - \alpha_i^2) \varrho^{2-mik} \right] \cos \alpha_i \varphi$$

(17)

$$\sigma_\varphi = A_{02} s(1+s) \varrho^{1-s} + A_{03} s(1-s) \varrho^{1+s} + 2 A_{04} + \sum_{i=1}^{i=j} \left[\sum_{k=1}^{k=4} A_{ik} mik (mik - 1) \varrho^{2-mik} \right] \cos \alpha_i \varphi$$

(18)

$$\tau_{r\varphi} = \sum_{i=1}^{i=j} \alpha_i \left[\sum_{k=1}^{k=4} A_{ik} (mik - 1) \varrho^{2-mik} \right] \sin \alpha_i \varphi$$

(19)

1.4.2.3. Die Rand- und Gleichgewichtsbedingungen

Die Radial- und Tangentialspannungen müssen am inneren gekrümmten Rand verschwinden. Diese Bedingung kann streng erfüllt werden. Am äusseren geneigten Rand ($x = b$) werden die angreifenden Normal- und Tangentialspannungen mit der Methode der kleinsten Quadrate minimalisiert.

An den Endquerschnitten muss das Gleichgewicht zwischen den Spannungen und den angreifenden äusseren Kräften bestehen. Diese Bedingung kann wiederum streng erfüllt werden.

Da die Randbedingungen am äusseren geraden Rand nur näherungsweise erfüllt werden, bilden die Restspannungen in ihrer Summe eine resultierende Kraft und ein resultierendes Moment, die als ungewollte äussere Belastung am Rand $x = b$ wirken und den wirklichen Spannungszustand verfälschen. Um dies auszuschliessen werden über den halben, über den Radius $r = b$ ausspringenden Bereich drei Gleichgewichtsbedingungen formuliert.

Dieses Vorgehen reduziert den Rechenaufwand beträchtlich, führt also zu einer schnelleren Konvergenz des Lösungsganges.

1.4.2.4. Das Gleichungssystem

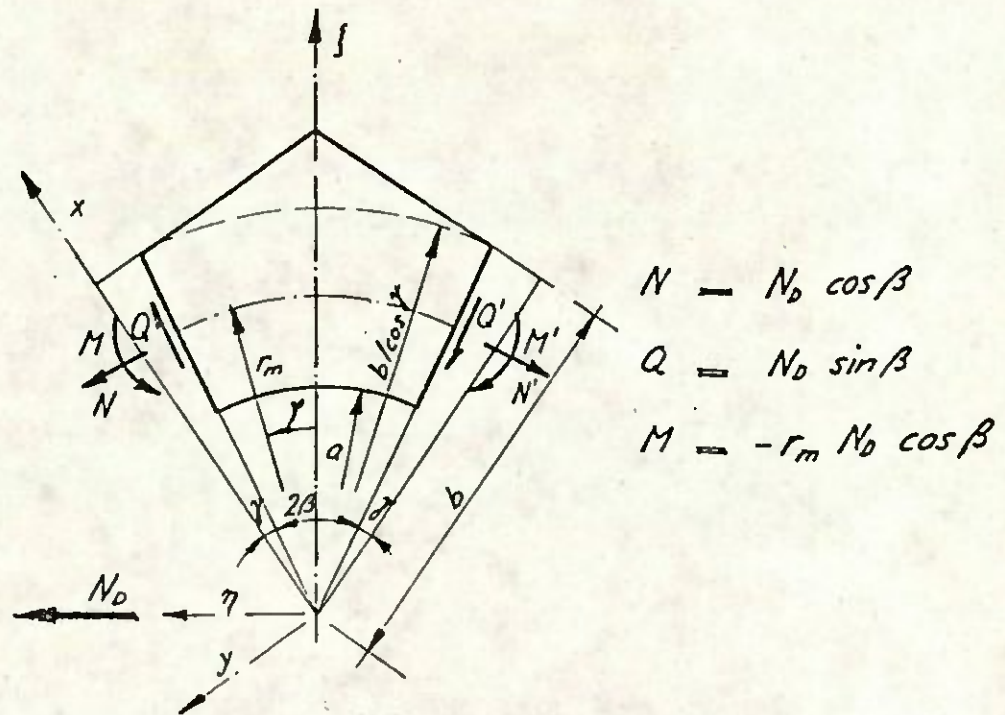
Die Randbedingungen für den inneren Rand, es wird jedes Reihenglied i für σ_r und $\tau_{r\phi}$ gleich null gesetzt, die drei Gleichgewichtsbedingungen an den Endquerschnitten und die drei Gleichgewichtsbedingungen am halben ausspringenden Bereich ergeben die Nebenbedingungen für ein Lagrange'sches Gleichungssystem. Die Hauptbedingungen erhält man, indem man das Integral der Quadrate der beiden zu minimalisierenden Spannungen am äusseren geraden Rand nach den Festwerten ableitet und gleich null setzt. Das Gleichungssystem wird nach den Festwerten aufgelöst. Für die Berechnung mit einer numerischen Rechenanlage wurden die Integrale der Hauptbedingungen numerisch mit zwanzig Stützpunkten berechnet.

Die Genauigkeit der Resultate steigt mit zunehmender Anzahl Reihenglieder, wobei durch die Rechenanlagen dort aber wieder Grenzen gesetzt sind. Nach der Ermittlung der Festwerte erhält man schliesslich die resultierenden Spannungen nach den Gleichungen (17), (18) u. (19).

1.4.3. Biegung mit symmetrischer Normal- und Querkraft

(Resultante im Krümmungsmittelpunkt normal zur Eckdiagonalen)

Analog zum Lastfall reine Biegung in Abschnitt 1.4.2 wird die Symmetrieachse in den Eckquerschnitt verlegt.



$$\begin{aligned}
 N &= N_0 \cos \beta \\
 Q &= N_0 \sin \beta \\
 M &= -r_m N_0 \cos \beta
 \end{aligned}$$

Bild 12

1.4.3.1. Spannungsfunktion

Der Ansatz der Spannungsfunktion wird nach Abschnitt 1.2.3 wie folgt gemacht:

$$\begin{aligned}
 F = & (A_{01}' \cdot r + A_{02}' \cdot r \cdot \ln r + A_{03}' \cdot r^{1+n} + A_{04}' \cdot r^{1-n}) \cos \varphi \\
 & + \sum_{i=1}^j \left(\sum_{k=1}^4 A_{ik}' \cdot r^{mik} \right) \cos \alpha_i \varphi
 \end{aligned} \quad (20)$$

mit

$$\alpha_i = \frac{\pi}{(r+\beta)} i ; \quad i = 1, 2, 3, \dots, j ; \quad n = \sqrt{1 + s^2 + k^2 - 2\mu\varphi}$$

1.4.3.2. Die Spannungskomponenten

Wenn man folgende Abkürzungen

$$A_{02} = \frac{A_{02}'}{b}; \quad A_{03} = A_{03}' \cdot b^{n-1}; \quad A_{04} = A_{04}' \cdot b^{-n-1}$$

$$A_{ik} = A_{ik}' \cdot b^{mik-2} \quad \text{und} \quad q = \frac{b}{r}$$

berücksichtigt, ergeben sich die Spannungskomponenten zu:

$$\begin{aligned} \sigma_r = & (A_{02} q + A_{03} n q^{1-n} - A_{04} n q^{1+n}) \cos \varphi \\ & + \sum_{i=1}^{i=j} \left(\sum_{k=1}^{k=4} A_{ik} (mik - \alpha_i^2) q^{2-mik} \right) \cos \alpha_i \varphi \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \sigma_\varphi = & (A_{02} q + A_{03} n(n+1) q^{1-n} + A_{04} n(n-1) q^{1+n}) \cos \varphi \\ & + \sum_{i=1}^{i=j} \left(\sum_{k=1}^{k=4} A_{ik} mik (mik - 1) q^{2-mik} \right) \cos \alpha_i \varphi \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \tau_{r\varphi} = & (A_{02} q + A_{03} n q^{1-n} - A_{04} n q^{1+n}) \sin \varphi \\ & + \sum_{i=1}^{i=j} \alpha_i \left(\sum_{k=1}^{k=4} A_{ik} (mik - 1) q^{2-mik} \right) \sin \alpha_i \varphi \end{aligned} \quad (23)$$

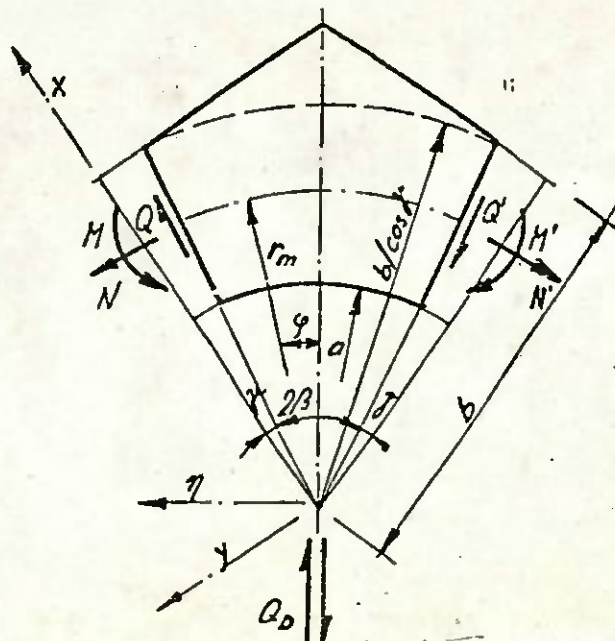
1.4.3.3. Die Rand- und Gleichgewichtsbedingungen

Die Formulierung der Rand- und Gleichgewichtsbedingungen erfolgt analog Abschnitt 1.4.2.3.

1.4.3.4. Das Gleichungssystem

Siehe dazu Abschnitt 1.4.2.4.

1.4.4. Biegung mit antimetrischer Normal- und Querkraft (Resultante gleich Querkraft im Eckdiagonalquerschnitt)



$$\begin{aligned} N &= Q_D \cdot \sin \beta \\ Q &= Q_D \cos \beta \\ H &= r_m Q_D \sin \beta \end{aligned}$$

Bild 13

1.4.4.1. Spannungsfunktion

Im Bild 13 erlauben die Symmetrieeigenschaften der Scheibe und der Grundlastfälle den Ansatz der Spannungsfunktion F aus Abschnitt 1.4.3.2 zu übernehmen. Anstelle der Cosinus-Funktionen sind die Sinus-Funktionen zu setzen.

$$F = (A_{01}' r + A_{02}' r \cdot \ln r + A_{03}' r^{1+n} + A_{04}' r^{1-n}) \sin \varphi + \sum_{i=1}^{i=j} \left(\sum_{k=1}^{k=4} A_{ik}' r^{mik} \right) \sin \alpha_i \varphi \quad (24)$$

wobei

$$\alpha_i = (2i+1) \frac{\pi}{4\beta} ; \quad i = 1, 2, 3, \dots, j ; \quad n = \sqrt{1+s^2+k^2-2\mu\varphi}$$

1.4.4.2. Die Spannungskomponenten

Mit den bekannten Abkürzungen errechnen sich die Spannungen zu:

$$\sigma_r = (A_{02} q + A_{03} n \cdot q^{1-n} - A_{04} n q^{1+n}) \sin \varphi + \sum_{i=1}^{i=j} \left[\sum_{k=1}^{k=4} A_{ik} (mik - \alpha_i^2) q^{2-mik} \right] \sin \alpha_i \varphi \quad (25)$$

$$\sigma_\varphi = (A_{02} q + A_{03} n(n+1) q^{1-n} + A_{04} n(n-1) q^{1+n}) \sin \varphi + \sum_{i=1}^{i=j} \left[\sum_{k=1}^{k=4} A_{ik} mik (mik - 1) q^{2-mik} \right] \sin \alpha_i \varphi \quad (26)$$

$$\tau_{r\varphi} = - (A_{02} q + A_{03} n q^{1-n} - A_{04} n q^{1+n}) \cos \varphi - \sum_{i=1}^{i=j} i \left[\sum_{k=1}^{k=4} A_{ik} (mik - 1) q^{2-mik} \right] \cos \alpha_i \varphi \quad (27)$$

1.4.4.3. Die Rand- und Gleichgewichtsbedingungen

Siehe dazu Abschnitt 1.4.2.3.

1.4.4.4. Das Gleichungssystem

Siehe dazu Abschnitt 1.4.2.4.

1.5. Die axialsymmetrische orthotrope Scheibe mit geradem unteren und geneigtem oberem Rand (gerader Sattelträger)

1.5.1. Die Grundlastfälle

Die in Bild 14 dargestellte Scheibe hat einen geraden unteren und einen geneigten oberen Rand. Sie ist bezüglich der y - Achse symmetrisch. An den Endquerschnitten greifen die äusseren Schnittkräfte in der Scheibenebene an. Um die Behandlung dieser Scheibenform übersichtlich zu gestalten, wird der allgemeine Belastungsfall in zwei symmetrische und einen antimetrischen Grundlastfall aufgespaltet.

Grundlastfall a): Reine Biegung

Grundlastfall b): Reine Normalkraft

Grundlastfall c): Biegung mit antimetrischer Querkraft. In der y - Achse greift eine reine Querkraft an.

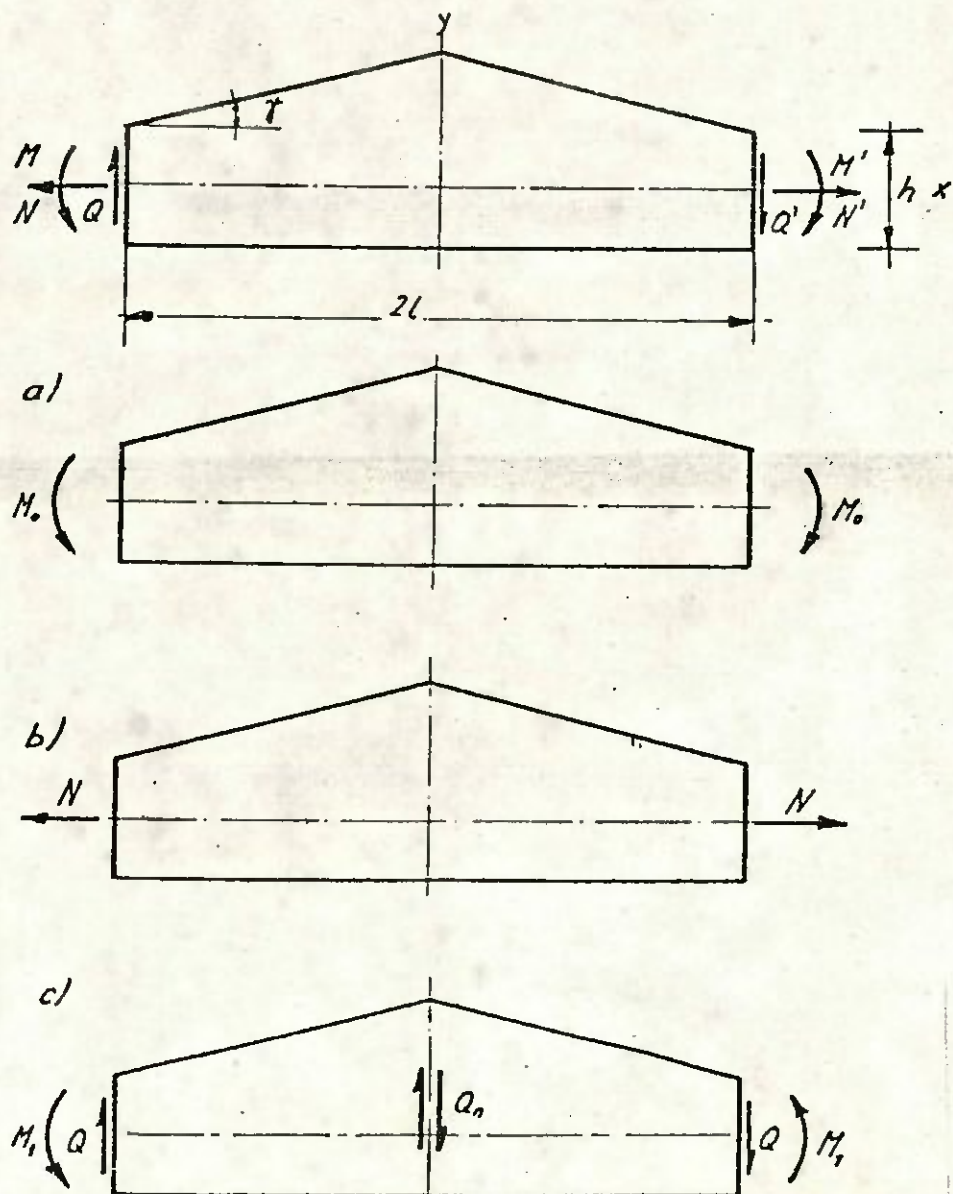


Bild 14

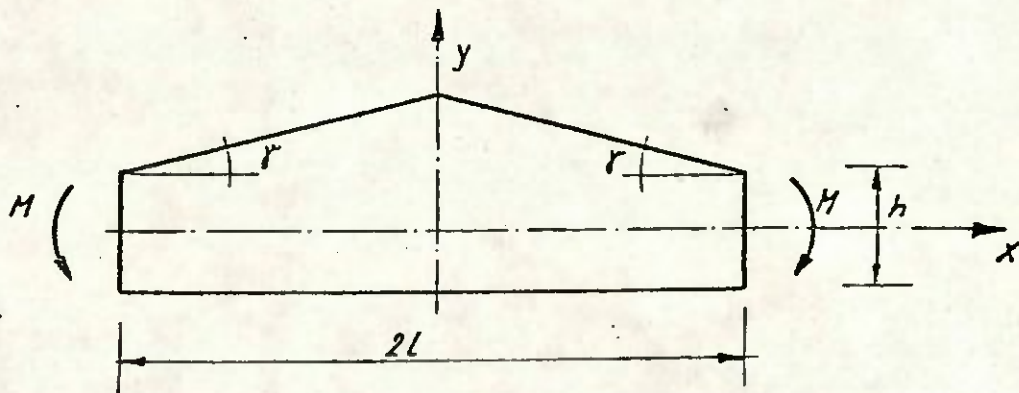
Für den Belastungsfall c) muss die Gleichgewichtsbedingung $M_1 = Q \cdot l$ gelten. Zwischen den Schnittgrößen des allgemeinen Lastfalles und denen der Grundlastfälle ergeben sich folgende Beziehungen:

$$M = M_0 + M_1 = M_0 + Q \cdot l$$

$$M' = M_0 - M_1 = M_0 - Q \cdot l$$

1.5.2. Reine Biegung

Bild 15



Der Koordinatenursprung wird in den Schnittpunkt der Symmetrieachse durch die obere Ecke und der Verbindung der Mittelpunkte an den Endquerschnitten gelegt.

1.5.2.1. Spannungszustand für reine Biegung

Es empfiehlt sich, die Spannungsfunktion nach Abschnitt 1.2.2 wie folgt anzunehmen:

$$F = A_0 \frac{y^3}{6} + \left\{ \sum_{i=1}^{i=j} \frac{1}{\omega_i^2} \left[A_{i1} \cosh(\lambda_1 \omega_i y) + A_{i2} \cosh(\lambda_2 \omega_i y) + A_{i3} \sinh(\lambda_1 \omega_i y) + A_{i4} \sinh(\lambda_2 \omega_i y) \right] \right\} \cos \omega_i x$$

mit $\omega_i = \frac{T \cdot i}{L}$

für alle $i = 1, 2, 3, 4 \dots j$ (28)

Die Ableitungen (Gleichungen 3) führen zu den Spannungskomponenten

$$\sigma_x = A_0 y + \sum_{i=1}^{i=j} \left[A_{i1} \cdot \lambda_1^2 \cosh(\lambda_1 \omega_i y) + A_{i2} \cdot \lambda_2^2 \cosh(\lambda_2 \omega_i y) + A_{i3} \cdot \lambda_1^2 \sinh(\lambda_1 \omega_i y) + A_{i4} \cdot \lambda_2^2 \sinh(\lambda_2 \omega_i y) \right] \cos \omega_i x \quad (29)$$

$$\sigma_y = - \sum_{i=1}^{i=j} \left[A_{i1} \cdot \cosh(\lambda_1 \omega_i y) + A_{i2} \cdot \cosh(\lambda_2 \omega_i y) + A_{i3} \cdot \sinh(\lambda_1 \omega_i y) + A_{i4} \cdot \sinh(\lambda_2 \omega_i y) \right] \cos \omega_i x \quad (30)$$

$$\tau_{xy} = \sum_{i=1}^{i=j} \left[A_{i1} \cdot \lambda_1 \cdot \sinh(\lambda_1 \omega_i y) + A_{i2} \cdot \lambda_2 \sinh(\lambda_2 \omega_i y) + A_{i3} \cdot \lambda_1 \cosh(\lambda_1 \omega_i y) + A_{i4} \cdot \lambda_2 \cosh(\lambda_2 \omega_i y) \right] \sin \omega_i x \quad (31)$$

1.5.2.2. Die Rand- und Gleichgewichtsbedingungen

Am unteren geraden Rand müssen die Normalspannung σ_y und die Schubspannung τ_{xy} verschwinden. Dies kann streng erfüllt werden. Am oberen geneigten Rand werden die senkrecht zum Rand angreifenden Spannungen und die Schubspannungen mit der Methode der kleinsten Quadrate minimalisiert.

An den Endquerschnitten wird das Gleichgewicht zwischen den Spannungen und den äusseren Kräften formuliert.

Wie im Abschnitt 1.4.2.3 wird verlangt, dass der obere halbe Keil sich im Gleichgewicht befindet. Dadurch kann die Konvergenz des Lösungsganges wesentlich verbessert werden.

1.5.2.3. Das Gleichungssystem

Die Randbedingungen am unteren Rand, die drei Gleichgewichtsbedingungen an den Endquerschnitten und die drei Gleichgewichtsbedingungen am halber ausspringenden Keil ergeben wiederum die Nebenbedingungen in einem Lagrange'schem Gleichungssystem. Die Hauptbedingungen erhält man, indem man das Integral der Summe der Quadrate der Normal- und Schubspannung am oberen geneigten Rand nach den einzelnen Festwerten ableitet und gleich null setzt. Das Gleichungssystem kann nach den Festwerten aufgelöst werden und somit die Spannungen erhalten werden.

1.5.3. Reine Normalkraft an den Endquerschnitten

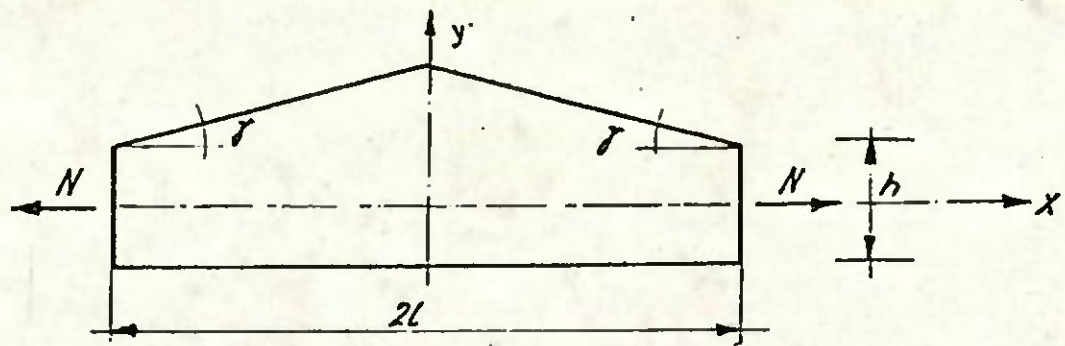


Bild 16

1.5.3.1. Spannungszustand für reine Normalkraftbelastung

Den Lösungsansatz für die Spannungsfunktion wählen wir wie folgt:
(Abschnitt 1.2.2)

$$F = \frac{A_0}{2} y^2 + \sum_{i=1}^{i=j} \frac{1}{\omega_i^2} \left[A_{i1} \cdot \text{Cosh}(\lambda_1 \omega_i y) + A_{i2} \cdot \text{Cosh}(\lambda_2 \omega_i y) + A_{i3} \cdot \text{Sinh}(\lambda_1 \omega_i y) + A_{i4} \cdot \text{Sinh}(\lambda_2 \omega_i y) \right] \cos(\omega_i x) \quad (32)$$

mit $\omega_i = \frac{T \cdot i}{l}$ für alle $i = 1, 2, \dots, j$

Wir erhalten die Spannungskomponenten

$$\sigma_x = A_0 + \sum_{i=1}^{i=j} \dots \quad (33)$$

$$\sigma_y = - \sum_{i=1}^{i=j} \dots \quad (34)$$

$$\tau_{xy} = \sum_{i=1}^{i=j} \dots \quad (35)$$

1.5.3.2. Die Rand- und Gleichgewichtsbedingungen

Siehe dazu Abschnitt 1.5.2.2.

1.5.3.3. Das Gleichungssystem

Siehe dazu Abschnitt 1.5.2.3.

1.5.4. Biegung mit antimetrischer Querkraft

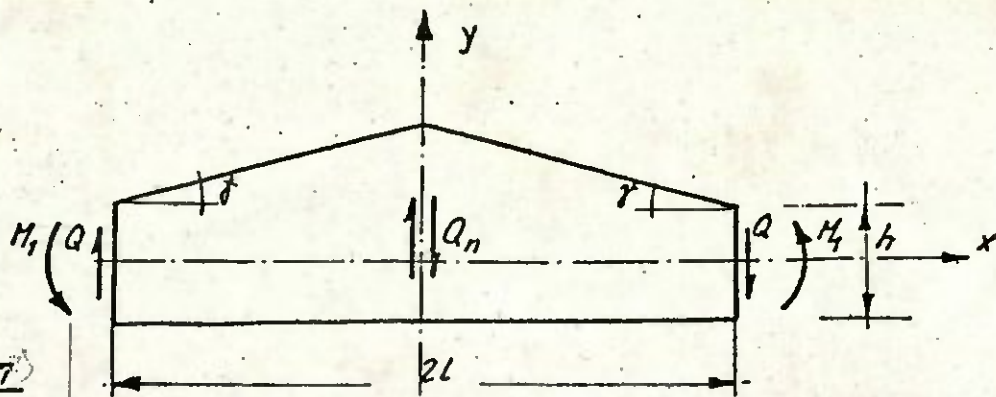


Bild 17

1.5.4.1. Spannungszustand für Biegung mit antimetrischer Querkraft
 Der Lösungsansatz für die Spannungsfunktion wird wie folgt gemacht:

$$F = \frac{A_0}{6} \left(x \cdot y^3 - \frac{3}{4} h^2 x y \right) + \sum_{i=1}^{i=j} \frac{1}{\omega_i^2} \left[A_{i1} \cdot \text{Cosh}(\lambda_1 \omega_i y) + A_{i2} \cdot \text{Cosh}(\lambda_2 \omega_i y) + A_{i3} \cdot \text{Sinh}(\lambda_1 \omega_i y) + A_{i4} \cdot \text{Sinh}(\lambda_2 \omega_i y) \right] \sin(\omega_i x) \quad (36)$$

mit $\omega_i = \frac{i \cdot \pi}{2l}$ für alle $i = 1, 2, 3 \dots j$

Das erste Summenglied gibt die Lösung für den parallelgurtigen geraden Balken mit antimetrischer Biege- und Querkraftbelastung. die weiteren Summenglieder konnten aus Abschnitt 1.5.2.2 übernommen werden, nachdem die Cosinusfunktion durch die Sinusfunktion ersetzt wurde.

Die Spannungskomponenten erhält man nach Abschnitt 1.2.2.

$$\sigma_x = A_0 (y x) + \sum_{i=1}^{i=j} \left[A_{i1} \cdot \lambda_1^2 \text{Cosh}(\lambda_1 \omega_i y) + A_{i2} \cdot \lambda_2^2 \text{Cosh}(\lambda_2 \omega_i y) + A_{i3} \cdot \lambda_1^2 \text{Sinh}(\lambda_1 \omega_i y) + A_{i4} \cdot \lambda_2^2 \text{Sinh}(\lambda_2 \omega_i y) \right] \sin(\omega_i x) \quad (37)$$

$$\sigma_y = - \sum_{i=1}^{i=j} \left[A_{i1} \cdot \text{Cosh}(\lambda_1 \omega_i y) + A_{i2} \cdot \text{Cosh}(\lambda_2 \omega_i y) + A_{i3} \cdot \text{Sinh}(\lambda_1 \omega_i y) + A_{i4} \cdot \text{Sinh}(\lambda_2 \omega_i y) \right] \sin(\omega_i x) \quad (38)$$

$$\tau_{xy} = - \frac{A_0}{2} \left(y^2 - \frac{1}{4} h^2 \right) - \sum_{i=1}^{i=j} \left[A_{i1} \cdot \lambda_1 \text{Sinh}(\lambda_1 \omega_i y) + A_{i2} \cdot \lambda_2 \text{Sinh}(\lambda_2 \omega_i y) + A_{i3} \cdot \lambda_1 \text{Cosh}(\lambda_1 \omega_i y) + A_{i4} \cdot \lambda_2 \text{Cosh}(\lambda_2 \omega_i y) \right] \cos(\omega_i x) \quad (39)$$

1.5.4.2. Die Rand- und Gleichgewichtsbedingungen

Siehe dazu Abschnitt 1.5.2.2.

1.5.4.3. Das Gleichungssystem

Siehe dazu Abschnitt 1.5.2.3.

1.6. Auswertung

Die Ermittlung der Spannungsverteilung erfolgte für verschiedene Trägerformen mit einer konstanten Orthotropie von $s = 6$, $k = 4,7$, $\mu_x = 0,3$ wie sie nach den Materialkennwerten für Brettschichtholz nach DIN 1052 festgelegt ist.

Diese Werte entsprechen im Durchschnitt dem europäischen Fichtenholz. Variiert wurden sowohl die Krümmungsverhältnisse wie die Neigung des oberen Randes. Die Berechnung erfolgte anhand von Algol-Programmen an der X8 der Universität Karlsruhe.

Im Hinblick auf eine rasche und unkomplizierte Bemessung sind für die notwendigsten Spannungskomponenten Näherungsformeln mit einem Kleincomputer aufgestellt worden, wobei das Krümmungsverhältnis $h/r_m = 1/\beta$ und der Tangens des Neigungswinkels γ des oberen Randes die Reihenglieder bilden. Die dabei gezwungenermaßen auftretenden Abweichungen konnten durchweg so klein gehalten werden, daß sie bei den für die Bemessung maßgebenden Spannungen nicht ins Gewicht fallen. Die größten Abweichungen liegen zwischen 2 und 4 0/0.

In Tabelle 1 sind für den gekrümmten Träger mit konstanter Querschnittshöhe die Koeffizienten für die Spannungsverteilungen über die Querschnittshöhe und die Maximalwerte der Spannungen für die 3 Lastfälle M, N und Q zusammengestellt. Dabei wurde von abweichenden Näherungsfunktionen ausgegangen, da es vor allem darauf ankam, die Maximalwerte möglichst genau bestimmen zu können.

Tabelle 2 gibt die notwendigen Spannungskomponenten für die allgemeine Form des Sattelträgers im Firstquerschnitt wieder. Berücksichtigt wurden alle 3 Lastfälle.

Der Spannungsnachweis in einem Querschnitt mit einem Abstand größer $h/2$ vom Firstquerschnitt kann für den Lastfall Biegung nach Tabelle 3 erfolgen. Für die anderen Belastungsfälle mußte aus Genauigkeitsgründen auf die Angabe von Näherungen verzichtet werden.

Zur Ueberprüfung der in den Tabellen 1 bis 3 ausgewerteten Rechenergebnisse wurden die in Karlsruhe und Stuttgart durchgeführten Versuche mit gekrümmten Trägern und Satteldachträgern, teilweise auch im ausländischen Schrifttum mitgeteilte Versuchsergebnisse, herangezogen. Dabei sollte nicht nur die Gültigkeit und Zuverlässigkeit des angewendeten Berechnungsverfahrens beurteilt, sondern auch die bei Brettschichtträgern aus Fichtenholz erreichten Bruchfestigkeiten in Längs- und Querrichtung zur Ueberprüfung der zulässigen Spannungen herangezogen werden.

1.7 Schrifttum zum Abschnitt 1

- (1) Heimeshoff, B.: Praktische Spannungsberechnung für den gekrümmten Träger mit Rechteckquerschnitt. Bautechnik, 44 (1967), S. 135/40.
- (2) Schelling, W.: Berechnung gekrümmter Brettschichtträger mit Biegebeanspruchung. Bauen mit Holz, 69 (1967), S. 158/60.
- (3) Buchmann, W.: Berechnung polarorthotroper Kreisbogenscheiben konstanter Dicke unter reiner Biegebeanspruchung. Bautechnik 46 (1969), S. 27/32.
- (4) Möhler, K.: Versuche mit gekrümmten Brettschichtträgern.
Blumer, H.: Berichte aus der Bauforschung, Heft 92, 1974.
- (5) Swelem, M.: Beitrag zur Spannungsermittlung in der symmetrischen Rahmenecke mit gegliedertem Querschnitt. Dissertation, Hannover, 1967
- (6) Blumer, H.: Spannungsberechnungen an anisotropen Kreisbogenscheiben und Sattelträgern konstanter Dicke.
TU Karlsruhe 1972

2. Auswertung von Versuchsergebnissen

2.1 Versuche mit Trägern 8/30, 440 cm lang (4)

Der Entwurf für das Versuchsprogramm sah Träger mit konstanter Trägerhöhe (Bauart I) vor, die im mittleren Teil das Krümmungsverhältnis $\beta = r_m/h = 5$ und 10 aufwiesen und bei denen der Abstand der Krümmungsanfänge in Trägerachse für jedes Krümmungsverhältnis 100 cm und 50 cm betrug. Die geometrischen Abmessungen und die Lastanordnung gehen aus Bild 18 hervor. Bei einer Lamellendicke von $a = 10$ mm betrug das Verhältnis $r_1/a = 135$ für $\beta = 5$ und $r_1/a = 285$ für $\beta = 10$. Von den 4 geometrisch verschiedenen Trägere Ausführungen standen 8 gleiche Einzelträger zur Verfügung, wovon jeweils 4 mit Harnstoff-Kleber (Kaurit 220) bzw. mit Resorcin-Kleber (Kauresin 440 R) verleimt waren. Die Holzgüte entsprach Güteklasse I, die Lamellen gingen ungestoßen über die ganze Trägerlänge durch. 16 Träger wurden statischen Bruchversuchen nach Bild 20 unter Aufnahme der Last-Durchbiegungslinien und Messung der Querdehnung im gekrümmten Bereich unterworfen, nachdem zuvor Einzelmessungen zur Bestimmung der elastischen Konstanten, Längs- und Querdehnungsmessungen im Firstquerschnitt und andere Einzelmessungen durchgeführt worden waren. Mit 4 Einzelträgern wurden Langzeitversuche vorgenommen, wobei die Anfangsbelastung für eine Querspannung von $1,2 \cdot 0,25 = 0,3 \text{ N/mm}^2$ gewählt wurde. Stufenweise Laststeigerungen erfolgten nach längeren Zeiträumen, soweit Verformungszunahmen oder ein Versagen der Träger nach einer gewissen Zeitdauer nicht festzustellen waren. Ein Teil der Träger wurde

als Satteldachträger (Bauart 2) durch Abarbeiten der Trägerkante nach Bild 19 geformt, nachdem aufgrund theoretischer Untersuchungen bei dieser geometrischen Form höhere Quersugspannungen zu erwarten waren, was auch durch aufgetretene Schadensfälle bestätigt zu werden schien. Bei Bauart 2 wurden nach eingehenden Messungen über Größe und Verteilung der Querdehnungen im Firstbereich bei 3 geometrisch unterschiedlichen Trägerformen je 2 Träger dem statischen Bruchversuch unterworfen.

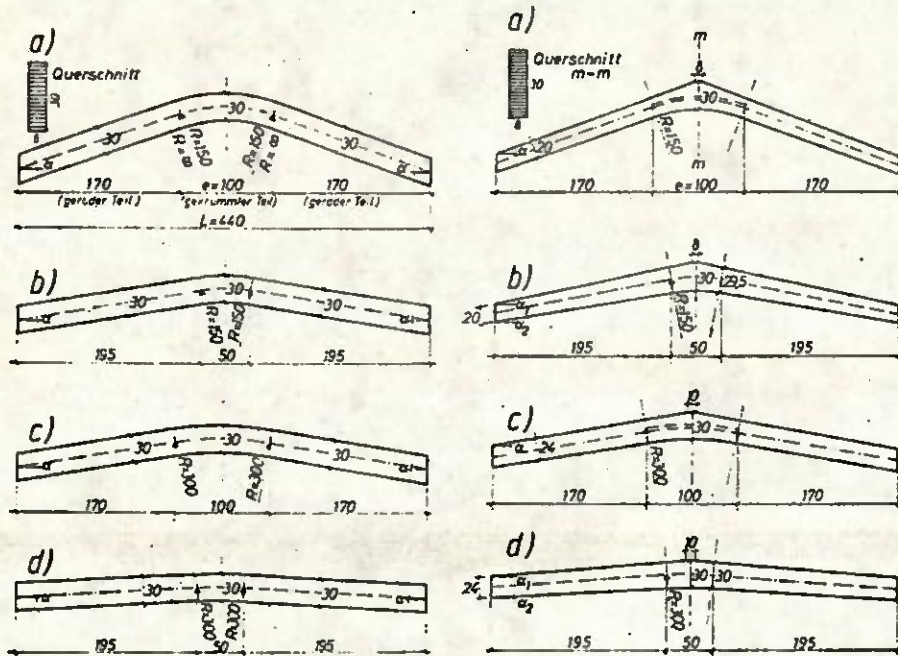


Bild 18 Gekrümmte Träger mit konstanter Querschnittshöhe (Bauart 1)

Bild 19 Gekrümmte Sattelträger mit veränderlicher Querschnittshöhe (Bauart 2)

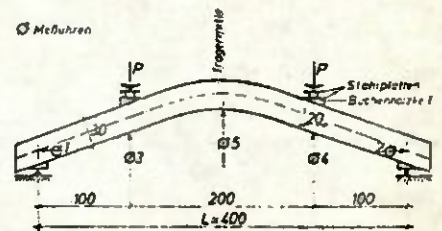


Bild 20 Versuchsanordnung für gekrümmte Brettschichtträger

Ein Teil der Träger lagerte vor der Prüfung im Freien unter Dach, der andere Teil in der Prüfhalle. Ihr Feuchtegehalt zum Zeitpunkt des statischen Bruchversuches betrug ca. 14% bzw. 10%. Aus den gemessenen Durchbiegungen bei der als zulässige angenommenen rechnerischen Quersugbeanspruchung von $0,25 \text{ N/mm}^2$ wurde der Mittelwert des E_{ℓ} -Moduls mit 13460 N/mm^2 berechnet,

während^d aus den Querdehnungsmessungen die mittleren E_q -Moduln senkrecht zur Faser zu 540 N/mm^2 für die Träger mit 10% Holzfeuchtigkeit und zu 425 N/mm^2 für die Träger mit 14% Holzfeuchtigkeit ermittelt wurden. Einzelmessungen an 15 Lamellen ergaben einen Mittelwert von $E_q = 490 \text{ N/mm}^2$ bei Streugrenzen von 725 und 357 N/mm^2 . Somit entsprach das Brettschichtholz der Versuchsträger praktisch den Annahmen der theoretischen Untersuchungen nach Abschnitt 1. Bei jedem statischen Versuch wurden Dehnungs- und Durchbiegungsmessungen, möglichst bis zur Bruchlast, durchgeführt. Während die Lastdurchbiegungslinien bis kurz vor dem Bruch praktisch geradlinig verliefen, zeigten die Querdehnungen in den einzelnen Lastpausen mit der Lasthöhe zunehmende Kriecherscheinungen (Bild 21), aus denen die beginnende Rißbildung zu erkennen war. Mit einer Ausnahme wurde die Erschöpfung der Tragfähigkeit durch Querzugrisse im mittleren Längsträgerbereich eingeleitet. Teilweise folgten sekundäre Biegebrüche oder Schubbrüche. Typische Bruchbilder sind in Bild 22 und 23 wiedergegeben.

Die aus den maximalen Lasten und Bruchmomenten sich ergebenden rechnerischen Größtwerte der Quer- und Längsspannungen für die Bauart 1 sind in Tabelle 4, für die Bauart 2 in Tabelle 5 zusammengestellt. "

Alle Träger der Bauart 2 versagten infolge von Querzugbrüchen im Firstbereich. Die rechnerischen Querzugfestigkeiten lagen bei den 16 Trägern mit konstanter Trägerhöhe zwischen $0,67$ und $1,85 \text{ N/mm}^2$, wobei bei den aufgetretenen Holz-

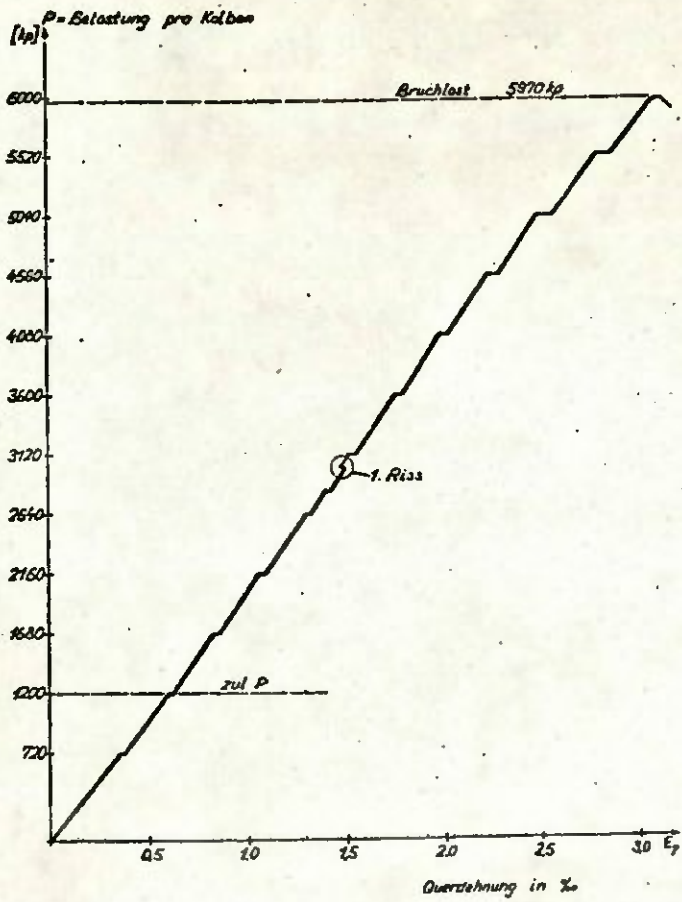


Bild 21: Verlauf der Querdehnungen beim Bruchversuch

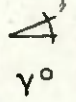


Bild 22: Typischer Querzugbruch bei Bauart 1



Bild 23: Typischer Querzugbruch bei Bauart 2

Tabelle 4: Ergebnisse der Bruchversuche für die Bauart 1

Träger Nr.	 γ°	r_m cm	β r_m/h	e cm	P_{Bruch} kN	$\sigma_0 = M/W$ N/mm ²	Rechn. Maximalsp.	
							σ_q N/mm ²	$\sigma_{\ell i}$ N/mm ²
1 H 1	19,5	150	5	100	24,0	18,2	0,91	19,9
1 H 4					27,0	22,0	1,10	23,9
1 R 1					16,8	13,4	0,67	14,6
1 R 4					24,0	20,0	1,00	21,9
2 H 3	9,6	150	5	50	24,8	20,8	1,04	22,7
2 H 4					26,4	22,4	1,12	24,5
2 R 2					44,4	37,0	1,85	40,4
2 R 4					38,6	32,0	1,60	35,2
3 H 1	9,6	300	10	100	58,2	23,2	1,16	48,2
3 H 3					48,6	20,2	1,01	42,1
3 R 1					59,7	23,8	1,19	49,8
3 R 2					>60,0	>25,2	>1,26	>52,7
4 H 1	4,8	300	10	50	60,0	25,2	1,26	52,7
4 H 2					50,4	20,8	>1,04	<u>43,3</u>
4 H 3					57,5	24,6	1,23	51,1
4 R 3					55,1	23,8	1,19	49,6

3 R 2: kein Bruch, 4 H 2: Biegebruch

Tabelle 5: Ergebnisse der Bruchversuche für die Bauart 2

Träger Nr.	γ^0	r_m cm	β r_m/h_m	e cm	P_{Bruch} kN	$\sigma_o = M/W_m$ N/mm ²	Rechn. Max. Spanng.	
							σ_q N/mm ²	$\sigma_{\ell i}$ N/mm ²
2 H 2	9,6	150	5	50	23,7	23,3	1,18	24,4
2 R 3					28,5	28,0	1,43	29,2
3 R 3	9,6	300	10	100	48,9	40,8	1,61	48,5
3 R 4					48,5	40,4	1,62	48,0
4 H 3	6,5	300	10	50	49,5	41,3	1,38	45,4
4 H 4					55,3	46,1	1,24	50,6

brüchen der statischen Versuche kein Einfluß der unterschiedlichen Verleimung und der Vorlagerung der Träger festzustellen war. Bei den 6 Trägern der Bauart 2 schwankten die rechnerischen Querkzugfestigkeiten zwischen 1,18 und 1,62 N/mm². Die Quer- und Längsdehnungsmessungen im Firstquerschnitt nach Bild 24 ergaben Spannungen, die nach Verlauf und Größe weitgehend mit den nach Abschnitt 1 berechneten Werten übereinstimmten (Beispiel Bild 25 für Träger 1H2 bei Bauart 1 und 2). Die Langzeitversuche, bei denen die 4 dauerbelasteten Träger der Bauart 1 während 22 Monaten unter $\sigma_q = 0,3 \text{ N/mm}^2$ und 3 Monate unter $0,45 \text{ N/mm}^2$ keine Anzeichen eines Dauerbruches zeigten, brachten bei $0,6 \text{ N/mm}^2$ Querspannung Brüche der Träger 1R1 und 1H3 nach 2 Tagen bzw. 8 Monaten unter dieser 3. Laststufe, während Träger 2H1 noch die 4. Laststufe mit $\sigma_q = 0,91 \text{ N/mm}^2$ weitere 3 Monate aushielt und der Träger 2R1 sogar unter der 5. Laststufe mit $\sigma_q = 1,09 \text{ N/mm}^2$ auch nach 9 weiteren Monaten keine Anzeichen eines Dauerbruches zeigte. Im abschließenden statischen Bruchversuch konnte von diesem Träger noch ein Bruchmoment von 38,4 kNm aufgenommen werden, was einer Querspannung von $1,6 \text{ N/mm}^2$ entspricht. Praktisch der gleiche Bruchwert wurde von dem Träger 2R4 im statischen Bruchversuch ohne vorangehende Langzeitbelastung erreicht, der die gleichen Abmessungen und die gleiche Art der Vorlagerung aufwies. Die während der Dauerstandbelastung gebrochenen Träger hatten nach der Freilagerung während des Dauerstandversuches im Prüfraum mehr oder weniger örtliche Trockenrisse an der Oberfläche bekommen, wodurch ihre Querkzugfestigkeit im Laufe der Zeit sicherlich beeinflußt wurde.

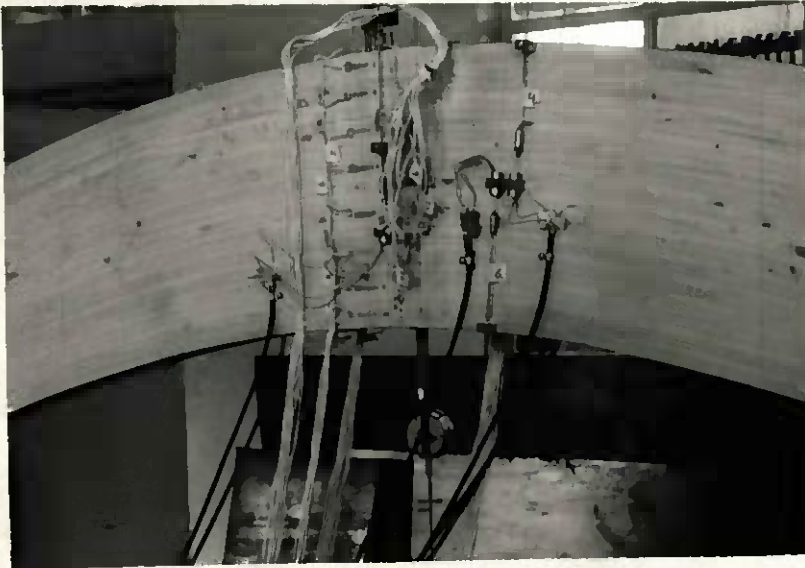


Bild 24: Anordnung der Meßeinrichtung in Trägermitte

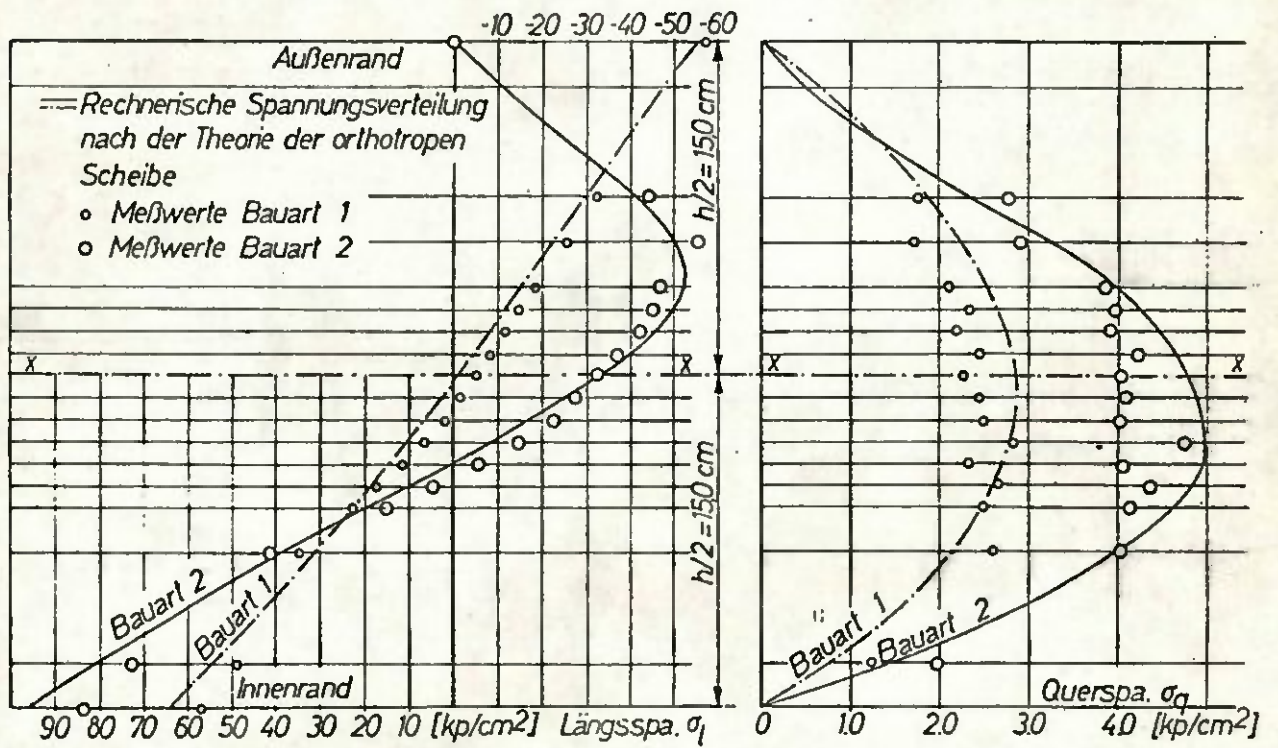


Bild 25: Längs- und Querspannungen in gekrümmten Trägern nach Rechnung und Versuch

Aus diesen Feststellungen muß geschlossen werden, daß die Dauerstandfestigkeit bei Querkzugbeanspruchung in erster Linie durch das Auftreten von Trockenrissen beeinträchtigt wird. Die statistische Auswertung der Versuche ergab für beide Bauarten mit 22,8% einen verhältnismäßig hohen Variationskoeffizienten, der sogar bei 17 und 18 Querproben $5,5 \times 2 \text{ cm}^2$ aus den Einzelträgern 1H4 und 4R3 mit 34,8% und 26,5% deutlich überschritten wurde. In diesem Zusammenhang wurden 405 Querkzugproben mit $5,5 \times 2 \text{ cm}^2$ Querschnitt aus 18 Trägerabschnitten eines Holzleimbaubetriebes geprüft, die bei $1,77 \text{ N/mm}^2$ mittlerer Querkfestigkeit einen Variationskoeffizienten von 27,9% ergaben. Eine Zusammenstellung der statistischen Auswertungen der Trägerversuche und der Einzelversuche ist in Tabelle 6 enthalten. Hieraus geht hervor, daß die Querkzugfestigkeit der Einzelproben im Mittel zwar die Trägerwerte übertraf, die 5 und 0,5% Fraktilen aber etwa in gleicher Höhe oder noch tiefer lagen. Bei den verhältnismäßig hohen Streuungen sind untere Grenzwerte bei den beiden Trägerbauarten von weniger als $0,4 \text{ N/mm}^2$ wahrscheinlich.

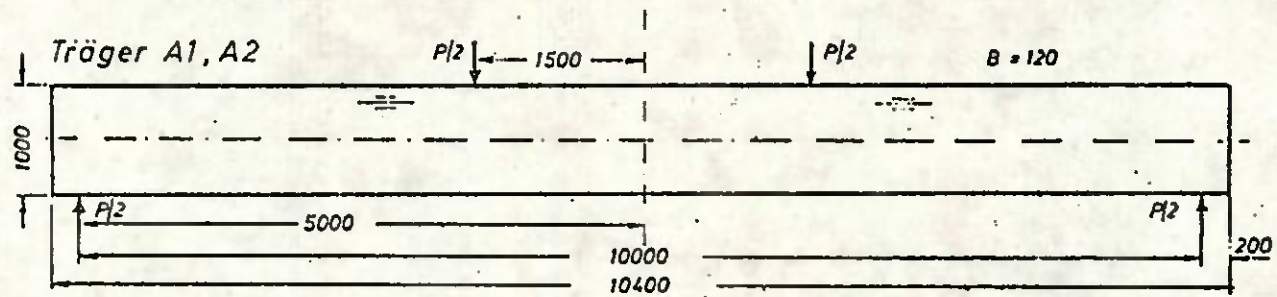
Tabelle 6: Statistische Auswertung der Querkzugfestigkeiten von Brettschichtholz

Probenart	Zahl der Proben	Mittelwert $\sigma_q \text{ N/mm}^2$	Variations- koeff. in %	Standard- ab. N/mm^2	Fraktilen	
					5 %	0,5 %
Träger Bauart 1	16	1,16	22,8	2,66	6,96	3,76
Träger Bauart 2	6	1,41	22,8	3,22	8,38	1,12
Querkzugproben aus 1H4	17	1,49	34,8	5,19	5,84	0
Querkzugproben aus 4R3	18	1,73	26,5	4,16	9,32	4,01
Querkzugproben aus 18 Trägern	405	1,77	27,9	4,94	9,55	4,96

2.2 Versuche mit Trägern 12/100, 1040 cm lang (7)

2.2.1 Ergebnisse und Auswertung nach Tabelle 1 und 2

Diese Versuche, durchgeführt an Trägern mit Querschnittsabmessungen und Trägerformen wie sie in der Praxis in der Regel vorliegen, umfaßten neben geraden parallelgurtigen Vergleichsträgern und Sattelträgern mit geradem Untergurt 3 verschiedene Bauarten von gekrümmten Trägern mit konstanter Trägerhöhe und Sattelträger mit gekrümmtem Untergurt, wobei das Krümmungsverhältnis $\beta = r_m/h$ bei allen Trägern praktisch gleich war. Von jeder Ausführungsart standen 2 gleiche Träger zur Verfügung. Die geometrischen Abmessungen und die Lastanordnung gehen aus Bild 26 hervor. Die Lamellendicke betrug $a = 30$ mm, das kleinste Verhältnis $r_1/a = 600/3 = 200$. Die Lamellen, die keilgezinkt waren, waren über die Trägerhöhe so angeordnet, daß die Lamellen mit dem höchsten Biegemodul in den Randbereichen lagen (Bild 27). Somit kann man davon ausgehen, daß im mittleren Querschnittsbereich die Anisotropiewerte des Brettschichtholzes weitgehend den Annahmen des Abschnittes I entsprachen. Bei den statischen Bruchversuchen wurden die Lastdurchbiegungslinien bis zum Bruch sowie die Längs- und Querdehnungen in verschiedenen Querschnitten des Firstbereiches bei den einzelnen Laststufen gemessen. Im Mittelquerschnitt zwischen den Einzellasten entsprach die Dehnungsverteilung weitgehend den theoretischen Werten nach Abschnitt I, nur im Bereich der Lasteinleitungen lag eine Abweichung durch die örtliche Querdruckbeanspruchung vor. Die Ergebnisse der Bruchversuche gehen aus Tabelle 7 hervor. Darin sind die Bruchlasten und die nach den χ -Werten der Tabellen 1 und 2 sich ergebenden maximalen Quer- und Biegerandspannungen in $l/2$ zusammengestellt.



Maße in mm

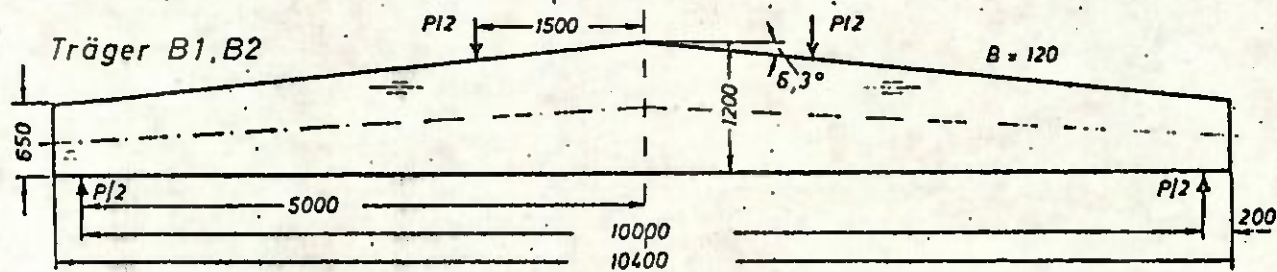
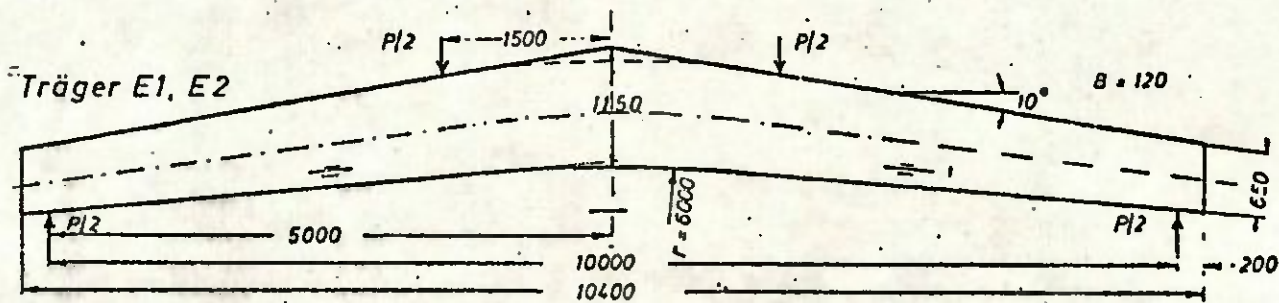
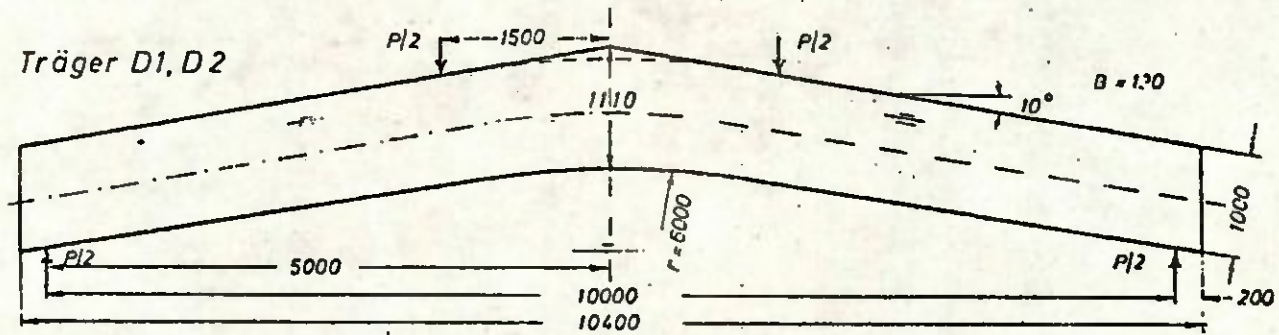
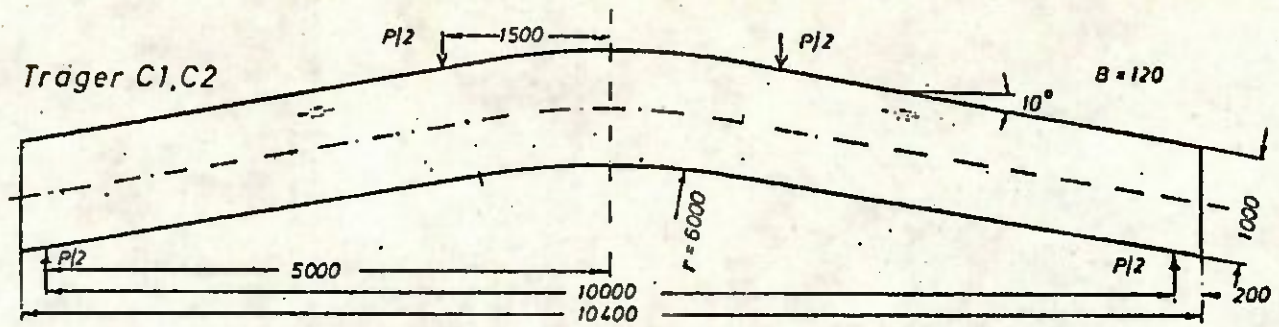
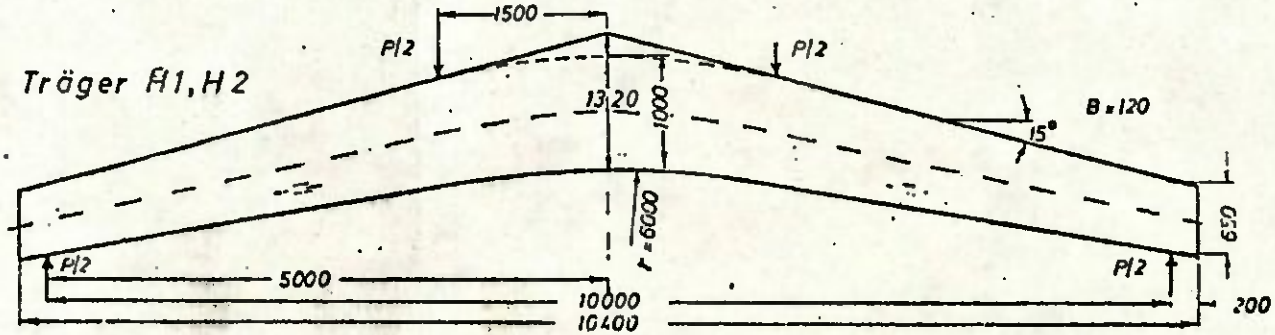
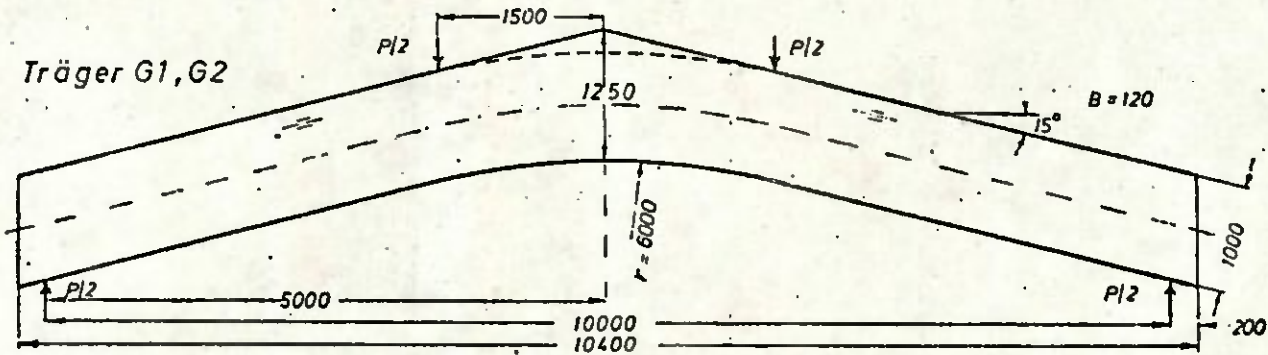
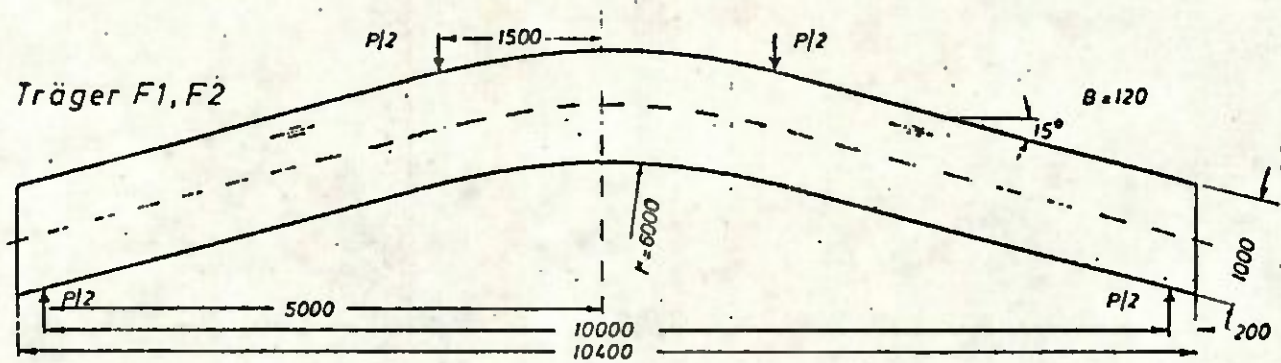


Bild 26a: Parallelträger und Sattelträger mit geradem Untergurt



Maße in mm

Bild 26b: Gekrümmte Träger und Sattelträger mit gekrümmten Untergurt ($\gamma = 10^\circ$)



Maße in mm

Bild 26 c: Gekrümmte Träger und Sattelträger mit gekrümmtem Untergurt ($\gamma = 15^\circ$)

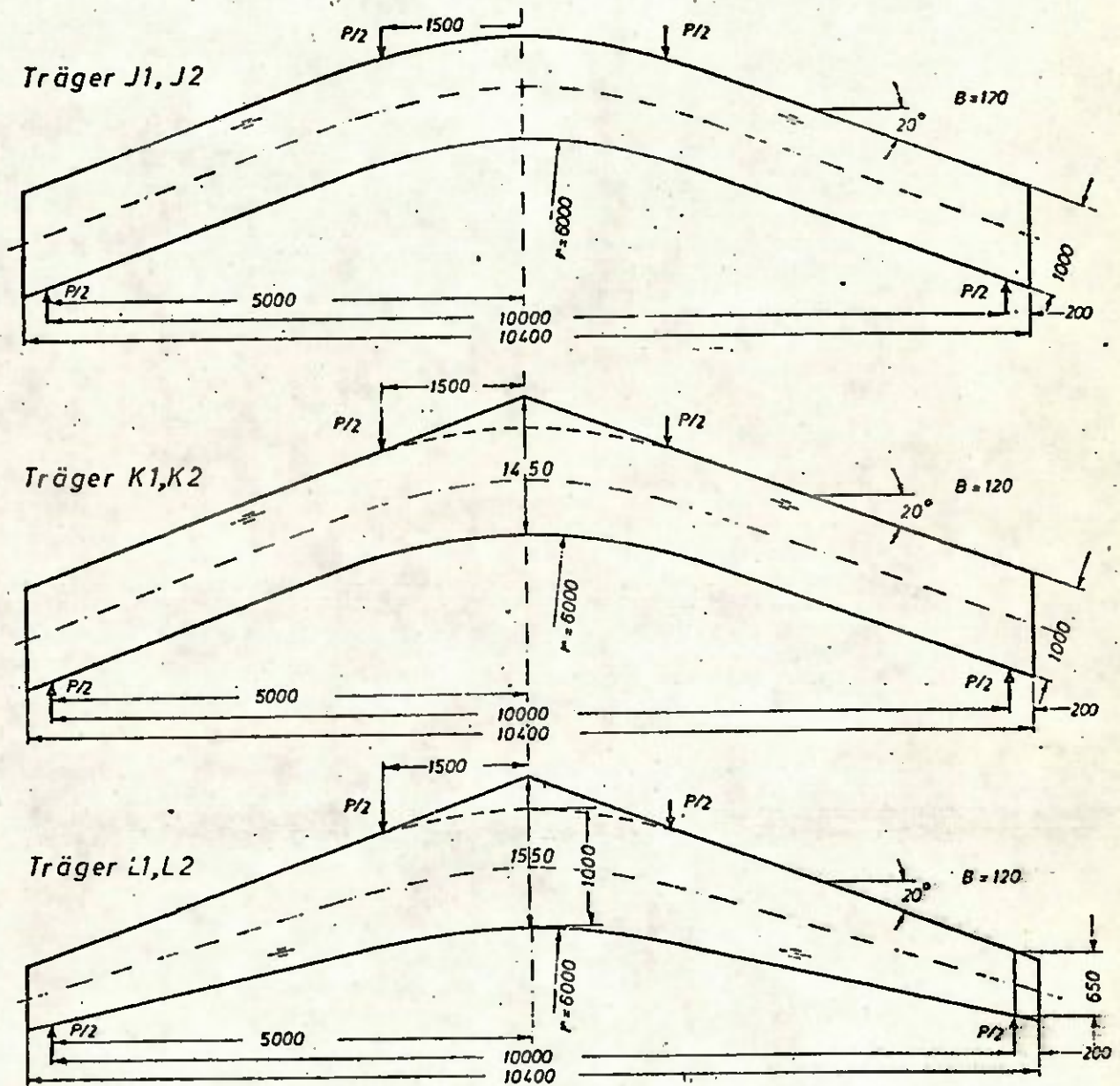


Bild 26 d: Gekrümmte Träger und Sattelträger mit gekrümmtem Untergurt ($\gamma = 20^\circ$)

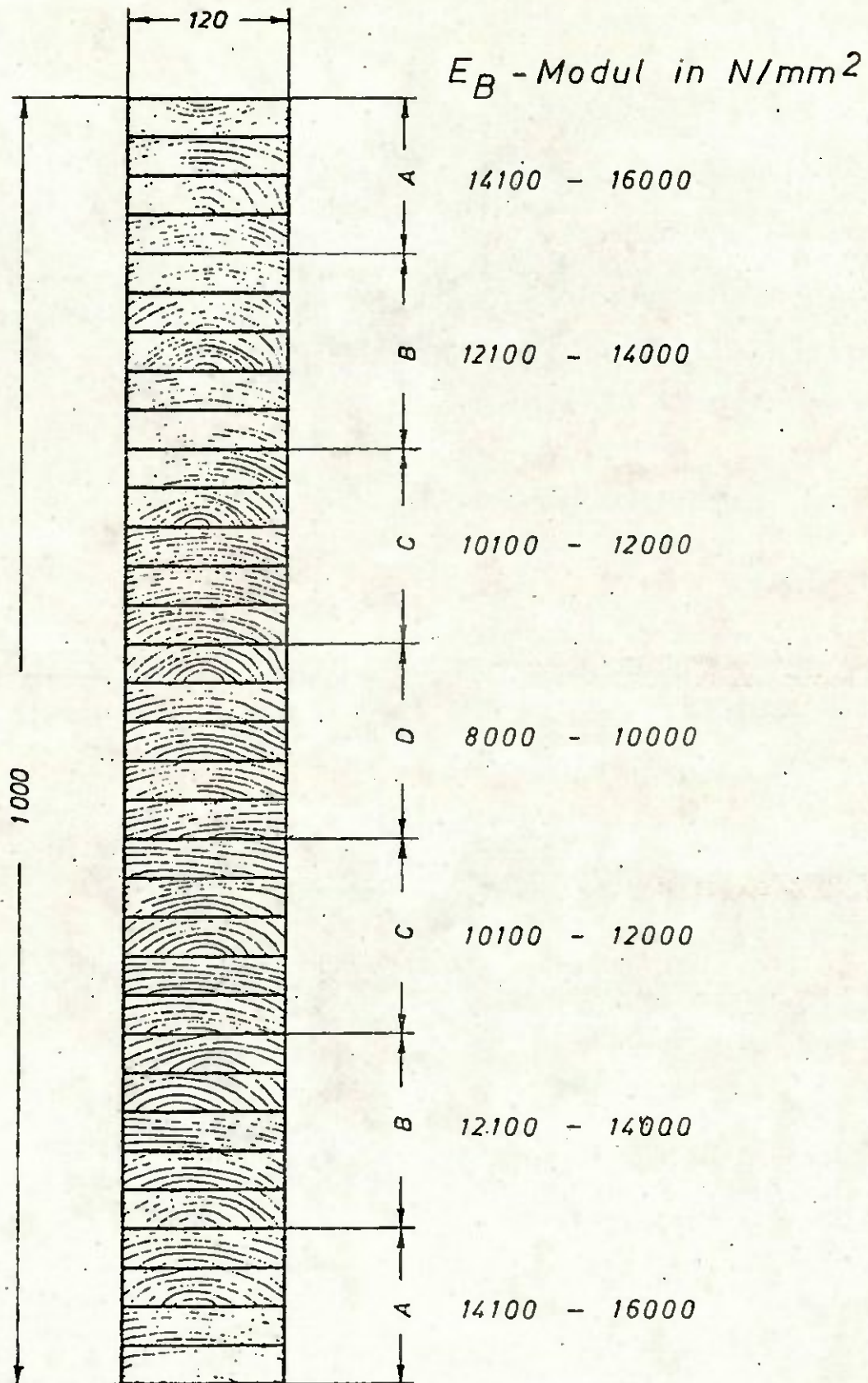


Bild 27: Anordnung der Bretter nach dem E-Modul über den Trägerquerschnitt

Tabelle 7: Rechnerische Quer- und Biegerandspannungen beim Bruch der Träger

Träger- bezeich- nung Nr, γ°	Querschnittsh. in Längsschn.		$\frac{h_m}{r_m}$	Höchst- last max φ kN	Biegespannung $\frac{M_m}{W_m}$ N/mm ²	Querzug- und Längsspannungen nach Tabelle 1 + 2 Fox/Foschi												
	h_m	r_m				κ_q	σ_q	κ_L	σ_L	κ_q	σ_q	κ_L	σ_L					
A1	0	1,00	-	0	400,0	35,0	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
A2	0	1,00	-	0	378,0	33,0	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
B1	0,3	1,20	-	0	373,6	22,7 (33,7)	0,022	0,50	1,220	27,7	0,0229	0,52	1,298	29,5				
B2	0,3	1,20	-	0	400,0	24,7 (35,6)		0,54		30,1		0,57		32,1				
C1	10	1,00	6,50	1/6,5	333,0	29,1	0,0385	1,12	1,067	31,1	0,0385	1,12	-	-				
C2	10	1,00	6,50	1/6,5	271,0	23,7		0,91		25,3		0,91	-	-				
D1	10	1,11	6,55	0,169	309,0	22,0	0,0534	1,18	1,287	28,5	0,0578	1,27	1,476	32,4				
D2	10	1,11	6,55	0,169	303,0	21,6		1,15		28,0		1,25		31,9				
E1	10	1,15	6,575	0,175	383,0	25,3	0,054	1,37	1,284	32,5	0,0589	1,49	1,476	37,3				
E2	10	1,15	6,575	0,175	341,0	22,6		1,22		29,0		1,33		33,4				
F1	15	1,00	6,50	1/6,5	234,0	20,5	0,0385	0,79	1,067	21,9	0,0385	0,79	-	-				
F2	15	1,00	6,50	1/6,5	220,5	19,3		0,74		20,6		0,74	-	-				
G1	15	1,25	6,63	0,189	300,0	16,9	0,0698	1,18	1,506	25,4	0,0806	1,36	1,723	29,1				
G2	15	1,25	6,63	0,189	220,5	12,4		0,87		18,7		1,00		21,4				
H1	15	1,32	6,66	0,198	295,0	14,8	0,0711	1,05	1,497	22,2	0,0821	1,22	1,723	25,5				
H2	15	1,32	6,66	0,198	347,0	17,4		1,24		26,1		1,43		30,0				
J1	20	1,00	6,50	1/6,5	183,0	16,0	0,0385	0,62	1,067	17,1	0,0385	0,62	-	-				
J2	20	1,00	6,50	1/6,5	216,0	18,9		0,73		20,2		0,73	-	-				
K1	20	1,45	6,725	0,216	220,5	9,2	0,0938	0,86	1,797	16,5	0,1089	1,00	1,933	18,2				
K2	20	1,45	6,725	0,216	283,5	11,8		1,11		21,2		1,29		23,4				
L1	20	1,55	6,775	0,229	278,8	10,2	0,0957	0,98	1,780	18,2	0,1107	1,13	1,933	20,2				
L2	20	1,55	6,775	0,229	328,0	12,0		1,15		21,4		1,33		23,8				

() max. Biegespannungen für Querschnitt $x = 3,50$ m mit $\kappa_L = 1,09$.

Wie auch aus den Bruchbildern (Bild 28 und 29) hervorgeht, trat das Versagen bei den gekrümmten Trägern durch Aufreißen des Holzes infolge Erreichens der Querkzugfestigkeit ein, während bei den geraden Trägern die Biegebruchfestigkeit die Grenze der Belastbarkeit bildete.

2.2.2 Vergleich der Versuchsergebnisse bei Auswertung nach Abs. 1 und Fox/Foschi (8)

Die für die US- und kanadischen Berechnungsvorschriften von gekrümmten Brettschichtträgern nach den Arbeiten von Fox/Foschi vorgesehenen Koeffizienten κ_q und κ_ℓ zur Berechnung der maximalen Spannungen, die für die Bemessung maßgebend sind, weichen beim Satteldachträger von den Werten nach Blumer (Abschnitt 1, Tabelle 2 und 3) ab. Sie liegen um 7 bis 15% höher. Der Unterschied dürfte in erster Linie auf die unterschiedlichen Anisotropiewerte zurückzuführen sein, die den Berechnungsverfahren zugrunde gelegt werden. Während für die vorstehenden Werte die Materialkennwerte E_{\parallel} , E_{\perp} und G nach den Rechenwerten der DIN 1052, Teil 1, Tabelle 1 sowie $\mu = 0,3$ eingesetzt wurden, wurden in (8) die Werte $\alpha = E_{\parallel}/E_{\perp} = 18$ anstelle von $11\,000/300 = 36,67$ und $\delta = 2\mu_{\varphi r} - E_{\varphi}/G_{r\varphi} = -11,0$ verwendet, während dieser Wert sich mit den DIN-Werten zu $\delta = 0,3 - 11\,000/500 = -21,7$ ergibt. Das bedeutet, daß hier eine geringere Anisotropie des Brettschichtholzes zugrunde gelegt wird als es den Werten der DIN 1052 entspricht. Die theoretischen Untersuchungen nach Abs. 1 (6) haben gezeigt, daß höhere Querkzugspannungen und größere Längsspannungen auftreten, je mehr man sich den Verhältnissen des isotropen Werkstoffes nähert.

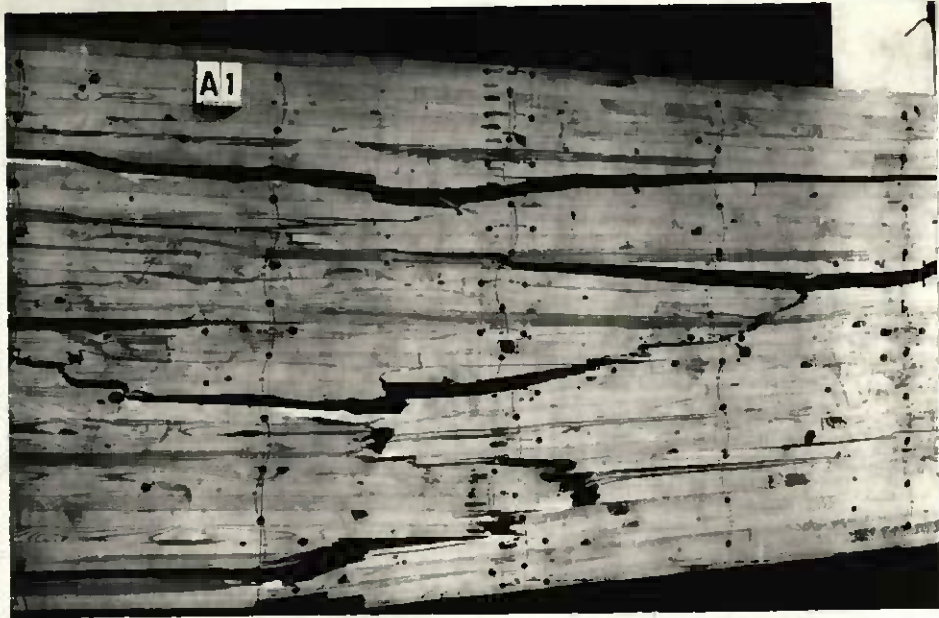


Bild 28: Ausbildung des Biegebruches bei den geraden Trägern

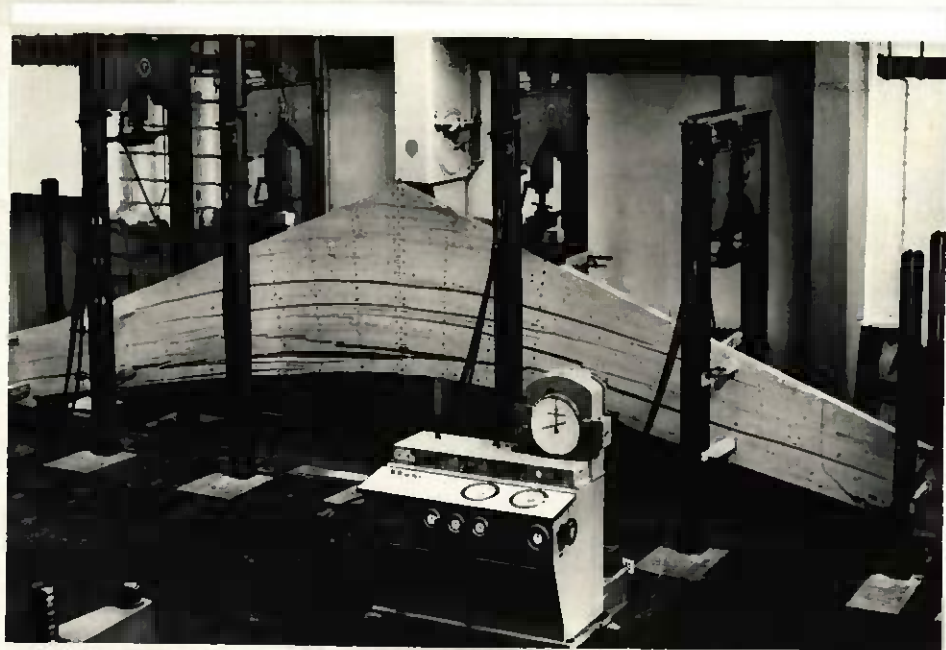


Bild 29: Ausbildung des Bruches bei den Satteldachträgern

Da nach beiden Berechnungsverfahren die rechnerischen Querkzugspannungen beim gekrümmten Träger mit konstanter Höhe in der gleichen Beziehung $\sigma_q = \sigma_B/4$ berechnet werden, kann durch Vergleich mit den Werten für die Satteldachträger ein Hinweis dafür gefunden werden, welche Berechnungswerte für das einheimische Fichtenholz angemessener sind. Daher sind in Tabelle 7 auch die κ_q und κ_ℓ -Werte nach Fox/Foschi für die Satteldachträger angegeben. Die Gegenüberstellung zeigt, daß sowohl die Querkzugfestigkeiten als auch die Längsspannungen der Satteldachträger, die mit $\kappa_\ell = 1 + 2,7 \tan \gamma$ berechnet wurden, deutlich über den Werten der Tabelle 2 liegen. Der Vergleich läßt den Schluß zu, daß die κ_q und κ_ℓ -Werte für einheimisches Fichtenholz gute Näherungswerte ergeben.

3. Einfluß der Trägerform auf die Querkzugfestigkeit

Bei den Stuttgarter Trägern mit konstanter Trägerhöhe von 1,00 m ergaben sich mit zunehmender Krümmungslänge abnehmende Festigkeiten. Berücksichtigt man die nach (4) festgestellte und durch Metzler (9) theoretisch bestätigte Tatsache, daß der Eintragungsbereich für den Höchstwert der Querkzugspannung etwa eine Länge gleich der Trägerhöhe hat, so ergibt sich die in Bild 30 dargestellte Abhängigkeit der Querkzugfestigkeit von der kritischen Länge $L^* = L - 2h$. Vervielfacht man die Länge mit dem querbeanspruchten Querschnitt, so ergibt sich eine Abhängigkeit vom Volumen, wie sie Barrett, Foschi und Fox 1975 (10) auch theoretisch nachgewiesen haben. Aufgrund von Versuchsauswertungen haben sie eine mit dem Logarithmus des querbeanspruchten Trägervolumens abnehmende zu-

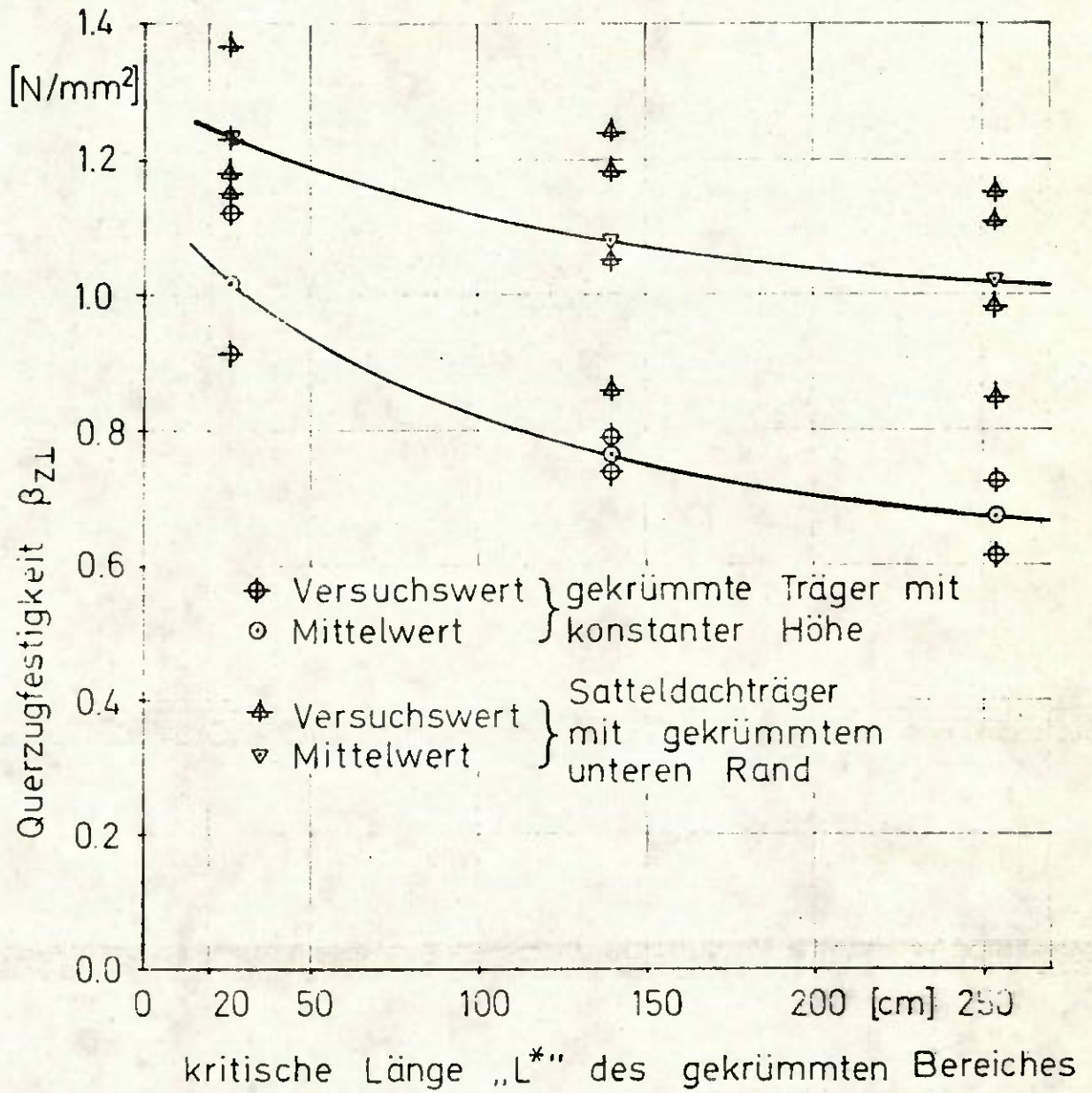
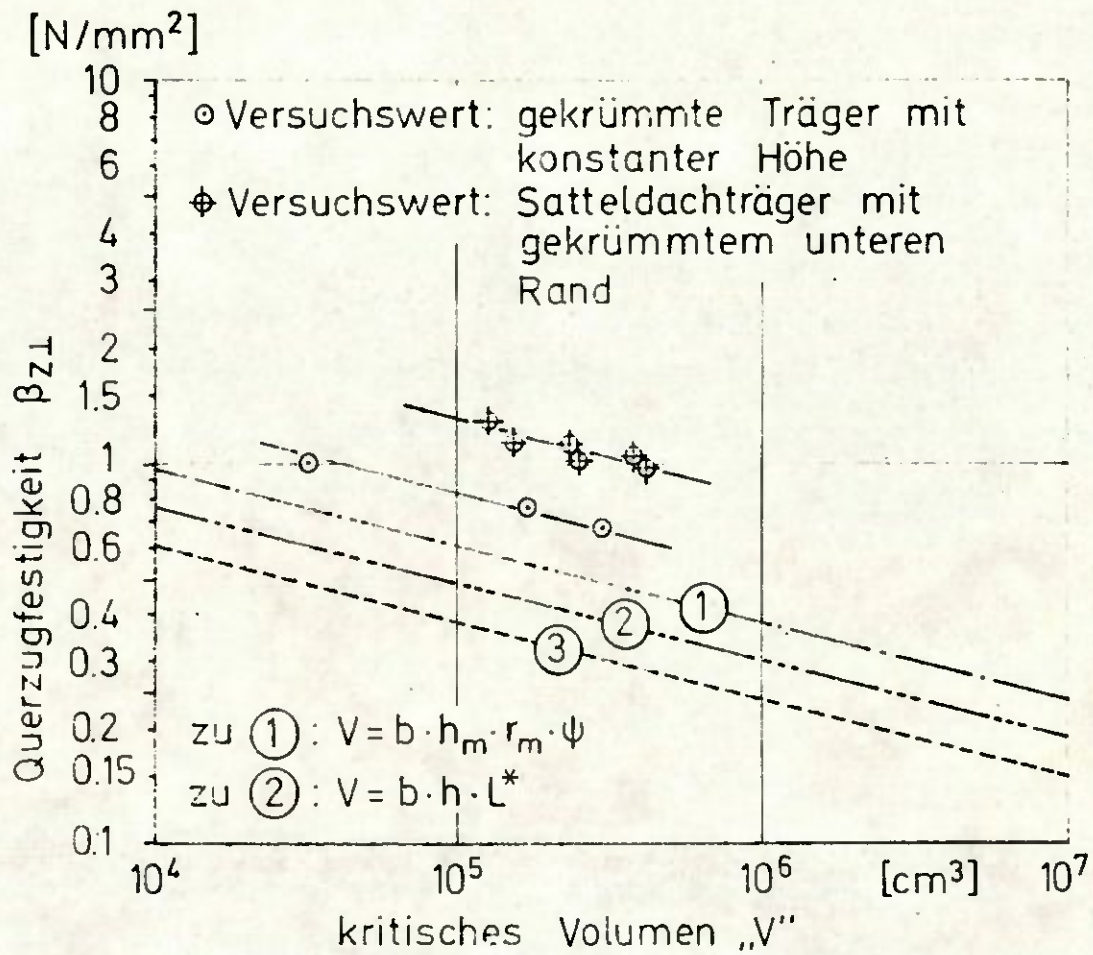


Bild 30: Abhängigkeit der Querzugfestigkeit von der kritischen Länge bei gekrümmten Biegeträgern

zulässige Querkzugspannung für gekrümmte Brettschichtträger vorgeschlagen .
 In Bild 31 sind die Stuttgarter Versuchswerte in Abhängigkeit von V im doppellogarithmischen Diagramm dargestellt. Bei den Satteldachträgern wurde eine für alle 3 Ausführungsformen nahezu konstante Querkzugfestigkeit ermittelt, da hier, wie aus den Querdehnungsmessungen nach Bild 32 beim Vergleich der beiden Trägerformen festgestellt wurde, hohe Querkzugbeanspruchungen nur in einem örtlich beschränkten Bereich unmittelbar im First auftreten. Trotzdem sollte diese Trägerform vermieden werden, was durch nachgiebige Verbindung des Firstkeiles auf den gekrümmten Obergurt erfolgen kann.

4. Zusammenfassung und Schlußfolgerungen

Die Versuche mit gekrümmten Brettschichtträgern mit über die Trägerlänge konstanter und veränderlicher Trägerhöhe haben bestätigt, daß die Querkzugbeanspruchungen bei Satteldachträgern nicht nach der DIN-Formel berechnet werden dürfen. Es ergeben sich im Firstbereich höhere Werte, die vom Krümmungsverhältnis und vom Neigungswinkel des Obergurtes gegen die Horizontale abhängen. Aus den Versuchsergebnissen geht hervor, daß die Berechnung nach Tabelle 2 die bei einheimischem Fichtenholz vorliegenden Verhältnisse gut erfaßt. Für den in der Regel vorliegenden Fall des im Firstbereich gekrümmten Brettschichtträgers unter Momentenbelastung können die maßgebenden Spannungen σ_q und σ_ℓ mit den nach Tabelle 2 berechneten oder in Bild 33 dargestellten Beiwerten κ_q und κ_ℓ berechnet werden. Hieraus gehen die bei Satteldachträgern gegenüber den gleichmäßig gekrümmten Trägern wesentlich höhere



- ① Satteldachträger (Gleichstreckenlast)
 ② gekrümmte Träger (Gleichstreckenlast)
 ③ Satteldach- und gekrümmte Träger (reine Momentenbelastung)
 ①-③ : 5% Fraktil-Kurven nach Barrett, Foschi und Fox

Bild 31: Querzugfestigkeit in Abhängigkeit vom kritischen Volumen „V“.

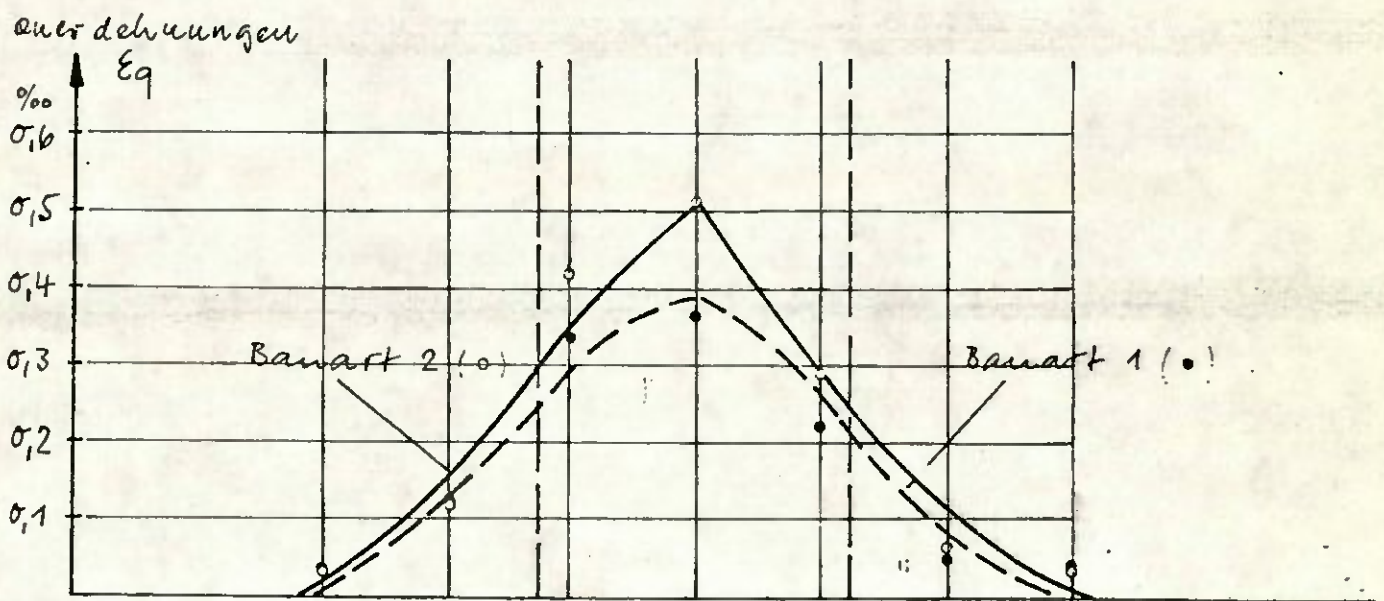
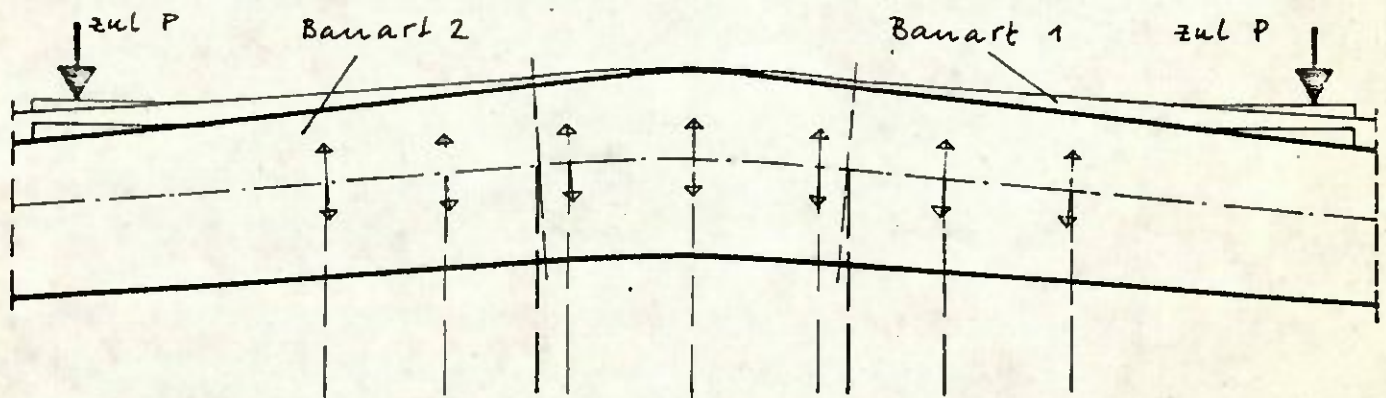


Bild 32 : Querdehnungen am Träger 4H4 bei Bauart 1 und 2

Spannungswerte hervor, die es ratsam erscheinen lassen, den Firstkeil durch eine nachgiebige Verbindung am gleichmäßig gekrümmten Träger zu befestigen. Blumer (12) hat hierauf besonders hingewiesen.

Vor allem bei Trägern mit konstanter Höhe ist die erreichbare Quersfestigkeit vom quer beanspruchten Volumen des Trägers abhängig. Dieser Einfluß sollte bei der Festlegung der zulässigen Querszugspannung berücksichtigt werden. Mit Rücksicht auf die großen Streuungen der Querszugfestigkeit, die auch bei äußerlich fehlerfreien Probekörpern Variationskoeffizienten von 22 - 35% ergaben, muß der zulässigen Spannung die 0,5%-Fraktile zugrunde gelegt werden, die mit etwa 0,3 bis 0,5 N/mm² angenommen werden kann. Im Hinblick auf unvermeidliche Fehlereinflüsse mußte gegen den unteren Grenzwert noch eine ausreichende Sicherheit gefordert werden. Da, wie vor allem die Langzeitversuche gezeigt haben und wie aus den Untersuchungen von Möhler/Steck (11) hervorgeht, Trockenrisse die Querszugfestigkeit herabsetzen, mußten in Fällen, in denen mit erheblichen Klimaschwankungen zu rechnen ist, die Trägeroberflächen gegen zu rasche Feuchteänderungen wirksam geschützt und gegebenenfalls die zulässige Querszugspannung ermäßigt werden. Es empfiehlt sich, die Querszugkräfte im Krümmungsbereich erforderlichenfalls durch besondere Konstruktionselemente wie eingeleimte Schrauben, aufgeleimte Furnierplatten oder aufgenagelte Stahlbleche aufzunehmen. Im einzelnen müssen ausgehend von den Ergebnissen der vorstehend ausgewerteten Versuche in den Holzbauvorschriften die für die Bemessung von gekrümmten Brettschichtteilen maßgebenden Bedingungen festgelegt werden. Dabei wird man gegebenenfalls die zulässige Querszugspannung von 0,25 N/mm² mehr oder weniger abmindern müssen.

Schrifttum zum Abschnitt 2

- (7) Prüfbericht Nr. H 30 667 der FMPA Stuttgart 1975
- (8) Foschi, R.O und
S.P. Fox: : Radial stresses in curved Timber Beams.
Journal of the Structural Division. ST 10,
Oktober 1970, S. 1997/2008
- (9) Metzler, H.: Beitrag zur Spannungsermittlung in biegebeanspruchten
Rahmenecken aus Brettschichtholz, Dissertation,
Hannover 1975
- (10) Baret, J.D.,
Foschi, R.O.
und S.P.Fox: Perpendicular-to-Grain
Strength of Douglas Fir.
Canadian Journal of Civil Engineering
Volume 2, Nr. 1, S. 50/57, 1975
- (11) Möhler, K.
und G. Steck: Rißbildung in Brettschichtträgern durch Trocknung oder
durch Trocknung nach vorheriger Feuchtigkeitszunahme,
Forschungsbericht Lehrstuhl für Ingenieurholzbau und
Baukonstruktionen, Universität Karlsruhe, 1977.
- (12) Blumer, H.: Spannungsberechnungen an anisotropen Kreisbogenscheiben
und Sattelträgern konstanter Dicke
Lehrstuhl für Ingenieurholzbau und Baukonstruktionen,
Universität Karlsruhe (TH) 1972