

Beitrag zur Berechnung von Holztragwerken nach der Spannungstheorie II. Ordnung

Jürgen Franz und Claus Scheer

1 Einleitung

Die z. Z. gültige Norm DIN 1052 Teil 1 „Holzbauwerke; Berechnung und Ausführung“, Ausg. Okt. 1969, enthält keine Angaben für die Anwendung der Spannungstheorie II. Ordnung. Auch in den Erläuterungen zu DIN 1052 [1] werden keine Grundlagen für die Spannungstheorie II. Ordnung im Holzbau angegeben.

Bisher wird der statische Nachweis für auf Druck und Biegung beanspruchte Bauteile im Holzbau auf der Grundlage der Stabilitätstheorie (ω -Verfahren) geführt, bei der nicht eine Erhöhung des Biegemomentenanteils aufgrund einer Berechnung der Schnittgrößen am verformten Tragwerk, sondern ein künstliches, physikalisch nicht einleuchtendes Anheben der vorhandenen Normalspannung mittels der Knickzahlen ω erfolgt.

Diese Knickzahlen ω werden in DIN 1052 Teil 1 in Abhängigkeit vom Schlankheitsgrad

$$\lambda = \frac{s_k}{i} \quad (1)$$

angegeben. Hierbei bedeuten:

s_k Ersatzknicklänge

i Trägheitsradius.

Die Ersatzknicklänge s_k ist als der charakteristische Wert für die Instabilitätsgefährdung des Tragwerkes anzusehen.

Sofern die Ersatzknicklänge s_k für die zu untersuchenden Systeme nicht in der einschlägigen Literatur angegeben ist, ist sie aus einem geeigneten Stabilitätsproblem zu ermitteln.

Der Rechenaufwand für die exakte Ermittlung der anzusetzenden Ersatzknicklängen kann erheblich sein, insbesondere wenn nicht konstante Flächenmomente 2. Grades oder nachgiebige Verbindungen (Dübel-, Stabdübel-, Nagel- und Nagelplattenanschlüsse) zu berücksichtigen sind. Außerdem kann für manche Tragwerksysteme die Ersatzknicklänge überproportional groß werden [2], so daß aufgrund der oberen Begrenzung der zulässigen Schlankheit keine wirtschaftliche Ausnutzung der zulässigen Spannung erfolgen kann. Weiterhin können bei der Ermittlung der Ersatzknicklängen Auslegungsschwierigkeiten auftreten [3].

Es kann also in bestimmten Fällen zweckmäßig sein, anstelle der aufwendigen Ermittlung der Ersatzknicklänge für den Stabilitätsnachweis nach dem ω -Verfahren gleich die Schnittgrößen nach der Spannungstheorie II. Ordnung zu ermitteln.

Die ersten Ansätze für die Theorie II. Ordnung im Holzbau sind in der Arbeit von Cassens [4] enthalten. In den letzten Jahren sind von verschiedenen Autoren Vorschläge für die Anwendung der Theorie II. Ordnung bzw. der nichtlinearen Theorie im Holzbau zur Diskussion gestellt worden, wie z. B. von Dimitrov [5], Heimeshoff [2, 6] und Pischl [7, 8]. Diese Aufzählung soll nur einen Überblick über den aktuellen Stand schaffen und erhebt selbstverständlich keinen Anspruch auf Vollständigkeit.

Ziel dieser Arbeit ist es, für den statischen Nachweis auf Druck und Biegung beanspruchter Bauteile im Holzbau nach der Spannungstheorie II. Ordnung Berechnungshilfen den in der Praxis tätigen Ingenieuren zur Verfügung zu stellen, da für bestimmte Tragwerksysteme das ω -Verfahren zu unwirtschaftlichen und dem Tragverhalten nicht entsprechenden Querschnittsabmessungen führen kann. Dabei wird der Einfluß verschiedener Parameter auf die Schnittgrößen nach der Spannungstheorie II. Ordnung diskutiert, wie z. B. elastische Nachgiebigkeit der Verbindungsmittel, Vorkrümmung und ungewollte Schrägstellung der druckbeanspruchten Stützen sowie Sicherheitsbeiwert.

2 Verfahren zur Berechnung nach der Theorie II. Ordnung und Voraussetzungen

Die Ermittlung der Schnittgrößen nach der Theorie II. Ordnung kann z. B. mittels folgender Verfahren erfolgen:

- Differentialgleichung (DGL)
- Übertragungsverfahren (ÜV)
- Kraftgrößenverfahren (KV)
- Verschiebungsgrößenverfahren (VV)
- Kombiniertes Verfahren (VV + KV).

In dieser Arbeit ist das Verschiebungsgrößenverfahren gewählt worden, welches in [9] ausführlich dargestellt ist.

Zum Verständnis der nachfolgenden Ausführungen werden die Grundlagen der Theorie II. Ordnung kurz wiederholt.

Die Kraft- und Verschiebungsgrößen sind in *Bild 1* dargestellt.

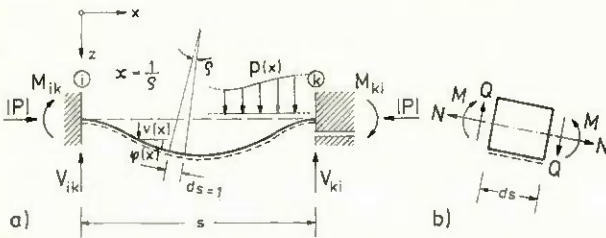


Bild 1: Bezeichnungen
a) Stab mit Stabendmomenten und Lagerkräften sowie Verschiebungsgrößen und äußerer Last
b) Element mit Schnittgrößen

Bei der Theorie II. Ordnung (elastische Theorie II. Ordnung) werden die Linearisierungen der Theorie I. Ordnung hinsichtlich der Geometrie beibehalten, so daß für die Verschiebungsgrößen gilt:

$$\dot{v} = \varphi \quad (2)$$

$$v'' = \varphi' = -\kappa \quad (3)$$

Bild 2 zeigt die qualitative Spannungs-Dehnungs-Beziehung für Nadelholz bei Druck- und Zugbeanspruchung in Faserrichtung.

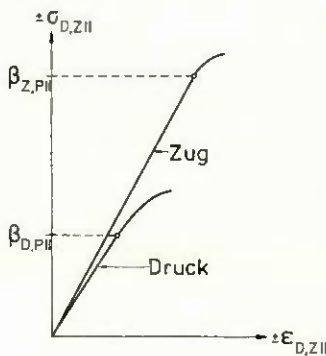


Bild 2: Qualitatives Spannungs-Dehnungs-Diagramm für Nadelholz

Da der Verlauf bis zur Proportionalitätsgrenze $\beta_{D,PII}$ bzw. $\beta_{Z,PII}$ nahezu geradlinig ist, wird für den Werkstoff Holz Hooke'sches Verhalten unterstellt ($\kappa = M/EI$).

Das Kräftegleichgewicht wird am verformten Element gebildet.

Da die Kraft-Verschiebungs-Beziehungen nicht mehr linear sind, muß mit der γ -fachen Last gerechnet werden.

Die Berechnung mit dem Verschiebungsgrößenverfahren nach der Theorie II. Ordnung unterscheidet sich bei unverschieblichen Tragsystemen von dem Vorgehen nach Theorie I. Ordnung nur dadurch, daß die Ermittlung der Grundzustände in Abhängigkeit von der Stabkennzahl

$$\epsilon = h \cdot \sqrt{\frac{|N|}{EI}} \quad (4)$$

erfolgt.

In Gl. (4) bedeuten

- /N/ Normalkraft nach der Spannungstheorie II. Ordnung,
- E Elastizitätsmodul nach DIN 1052 Teil 1, der bei hohen Dauerlasten wegen des Kriecheinflusses abgemindert werden sollte,
- I Flächenmoment 2. Grades.

Bei verschieblichen Tragwerksystemen müssen zusätzlich noch wegen der Stabdrehwinkel ψ die fiktiven Lasten berücksichtigt werden. Diese fiktiven Lasten $P_{fi} = |N| \cdot \psi$, am unverformten Tragwerk angesetzt, ergeben dieselben Lagerkräfte und Schnittgrößen wie das Gleichgewicht am verformten Tragwerk.

Sofern sich die Stabkennzahl ϵ zahlenmäßig $\leq 0,8$ ergibt, so kann der Einfluß der Theorie II. Ordnung für den Einzelstab vernachlässigt werden, d. h. es können die Grundzustände nach der Theorie I. Ordnung ($\epsilon = 0$) verwendet werden. Für den Lastfall Vorkrümmung dagegen gilt dies erst für $\epsilon \leq 0,6$.

Voraussetzung für die Anwendung des Verschiebungsgrößenverfahrens ist die Gültigkeit des Superpositions-gesetzes. Die Schnittgrößen infolge verschiedener Querlasten können nur dann superponiert werden, wenn die Stabkennzahl ϵ gleich ist. Deshalb muß bei Querlasten, zu denen unterschiedliche Normalkräfte N gehören, bei jedem Einzelzustand mit der superponierten Normalkraft N gerechnet werden, um die verschiedenen Lastfälle superponieren zu können. Die Ergebnisse der einzelnen Querlastfälle sind somit Näherungen wegen der zu großen Stabkennzahl ϵ .

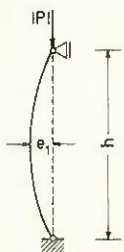
Aus diesem Grunde muß bei der Vorschätzung der Normalkräfte die ungünstigste Lastfallkombination angesetzt werden.

3 Annahmen für die Anwendung der Spannungstheorie II. Ordnung im Holzbau

Für die Berechnung der Schnittgrößen nach der Spannungstheorie II. Ordnung sind Annahmen hinsichtlich der Vorkrümmung und der ungewollten Schrägstellung der auf Druck bzw. Druck und Biegung beanspruchten

Bauteile zu treffen. Nachstehend wird auf diese im zuständigen NABau-Arbeitsausschuß erarbeiteten Annahmen, über die weitgehend Konsensus erzielt worden ist, eingegangen.

Zur Berücksichtigung des Einflusses von geometrischen Imperfektionen, wie z. B. Abweichung von der planmäßigen Geometrie, ist wahlweise eine sinus- oder parabel-förmige Vorkrümmung der Stabachse in ungünstigster Richtung mit der ungewollten Ausmitte e_1 in Stabmitte anzusetzen (s. Bild 3).



$$e_1 = \left(0,1 + \frac{2 \cdot h}{a \cdot i} \right) k \quad (5)$$

Bild 3: Druckstab mit ungewollter Ausmitte e_1

In Gl. (5) bedeuten:

- k, i Kernweite bzw. Trägheitsradius des Querschnitts; bei zusammengesetzten Stäben ohne Berücksichtigung etwaiger Nachgiebigkeiten der Verbindungsmittel; bei unsymmetrischen Querschnitten sind die größeren Werte einzusetzen,
- h Netzlänge des Stabes,
- a Vorkrümmungsbeiwert
für Vollholz der Güteklasse I: a = 400
für Vollholz der Güteklasse II: a = 250
für Brettschichtholz: a = 500.

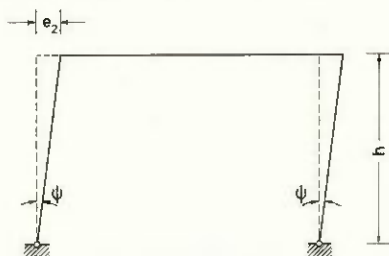


Bild 4: Zweigelenrahmen mit ungewollter Schrägstellung der Stiele

Bei verschieblichen Tragwerksystemen ist zusätzlich zur ungewollten Ausmitte e_1 eine ungewollte Schrägstellung der Stiele des unbelasteten Tragwerks (s. Bild 4) in ungünstigster Richtung zu berücksichtigen. Als rechnerische geradlinige Abweichung von der Sollage des Stieles ist

$$\psi = \pm \frac{1}{100 \cdot \sqrt{h}} \quad (6)$$

anzusetzen. Darin bedeutet h die Stielhöhe in m; bei mehrgeschossigen Rahmen die gesamte Tragwerkhöhe.

Wenn bei verschieblichen Tragwerksystemen zusätzlich aussteifende Bauteile (z. B. Wandscheiben, Verbände) z. B. zur Verringerung der horizontalen Kopfpunktverschiebungen der Stiele angeordnet werden, kann unter bestimmten Voraussetzungen dieses Gesamttragwerk als hinreichend unverschieblich angesehen werden, so daß dann nur den aussteifenden Bauteilen alle horizontalen Lasten einschließlich der fiktiven Lasten infolge ungewollter Schrägstellung der Stiele zuzuweisen sind.

Denkbar wären Festlegungen in Anlehnung an DIN 1045 „Beton und Stahlbeton; Bemessung und Ausführung“, Abschn. 15.8.1, Ausg. Dez. 1978, bzw. an den Norm-Entwurf DIN 1053 Teil 2, „Mauerwerk; Ingenieurmäßig bemessene Bauten; Berechnung und Ausführung“, Abschn. 7.5, Ausg. Febr. 1981, oder an den Norm-Entwurf DIN 18 800 Teil 2 „Stahlbauten; Stabilitätsfälle, Knicken von Stäben und Stabwerken“, Abschn. 5.2.1, Ausg. Dez. 1980.

Die Übertragbarkeit der Festlegungen in den o. g. Normen zum Kriterium „hinreichend unverschieblich“ ist jedoch noch für den Bereich des Holzbaues anhand von Vergleichsrechnungen zu überprüfen.

Die Schnittgrößen nach der Theorie II. Ordnung sind für die γ -fachen Lasten unter Berücksichtigung der ungewollten Ausmitte e_1 und der ungewollten Schrägstellung der Stiele (zusätzlich bei verschieblichen Tragwerksystemen) zu ermitteln. Der Nachweis ausreichender Tragsicherheit ist erfüllt, wenn die Bedingung

$$\frac{N^{II}}{\gamma \text{ zul } \sigma_{pII}} + \frac{M^{II}}{\gamma \text{ zul } \sigma_B} \leq 1 \quad (7)$$

eingehalten ist.

In Gl. (7) bedeuten:

- N^{II} Normalkräfte nach der Spannungstheorie II. Ordnung
- M^{II} Biegemoment nach der Spannungstheorie II. Ordnung
- A Stabquerschnitt
- W Widerstandsmoment
- zul σ_{pII} zulässige Druckspannung parallel zur Faser
- zul σ_B zulässige Biegespannung
- γ Sicherheitsbeiwert

In *Tabelle 1* sind die Sicherheitsbeiwerte γ zusammengestellt, die in anderen Normen oder Norm-Entwürfen enthalten sind.

Tabelle 1: Sicherheitsbeiwerte γ in anderen Normen oder Norm-Entwürfen

	Sicherheitsbeiwerte γ für die Gebrauchslast
DIN 1045 (Ausg. Dez. 1978)	1,75
DIN 1053 Teil 2 (Entwurf Febr. 1981)	2,0 bis 3,0
DIN 18800 Teil 2 (Entwurf Dez. 1980)	1,5 für LF Hauptlasten (H) 1,3 für LF Haupt- u. Zusatzlasten (HZ)
SIA 164 (Ausg Sept. 81)	2,0

Cassens [4] schlägt einen Sicherheitsbeiwert $\gamma = 2,0$ für die Theorie II. Ordnung im Holzbau vor.

Die Verfasser haben den Einfluß des Sicherheitsbeiwertes γ unter Vernachlässigung der Vorkrümmung e_1 der Stiele für zwei ausgewählte Beispiele untersucht (s. *Bild 5*).

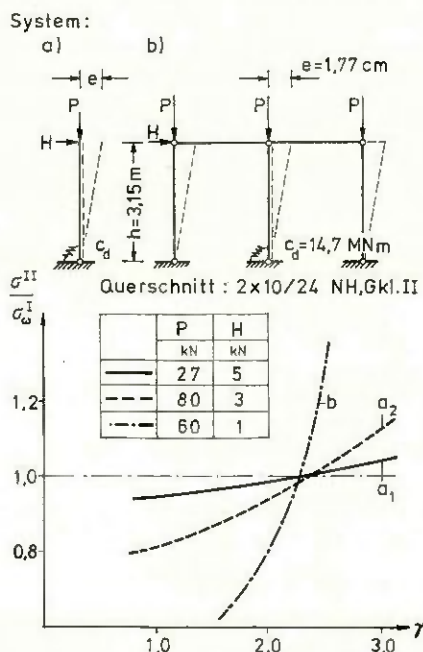


Bild 5: Einfluß des Sicherheitsbeiwertes γ

Das *Bild 5* zeigt, daß bei einem Sicherheitsbeiwert $\gamma \cong 2,25$ bis 2,4 die Stabilitätstheorie (ω -Verfahren) die gleichen Ergebnisse wie nach der Spannungstheorie II. Ordnung unter Vernachlässigung der Vorkrümmung liefert.

Da nach der Spannungstheorie II. Ordnung das Tragverhalten wegen der Berücksichtigung der γ -fachen Last, der Vorkrümmung und der ungewollten Schrägstellung der Stiele genauer als nach der Stabilitätstheorie (ω -Verfahren) erfaßt wird und außerdem eine Absicherung nicht gegen den Bruchzustand, sondern gegen die γ -fachen zulässigen Spannungen erfolgt, schlagen die Verfasser unter Beachtung der *Tabelle 1* und weiterer Untersuchungen vor, einen Sicherheitsbeiwert $\gamma = 2,0$ für den Lastfall H und HZ anzusetzen.

4 Elastische Nachgiebigkeit der Verbindungen

Bei mechanischen Verbindungsmitteln wie Nägeln, Dübeln, Stabdübeln treten an den Verbindungsstellen zwischen den einzelnen Bauteilen mehr oder weniger große Verschiebungsgrößen auf (Verschiebungen und Verdrehungen). Diese Verschiebungsgrößen sind hauptsächlich abhängig von

- der Art der Verbindungsmittel,
- der Güteklasse des Holzes (insbes. Jahrringbreite),
- der Krafrichtung bezüglich der Holzfaserrichtung und
- der Holzfeuchtigkeit.

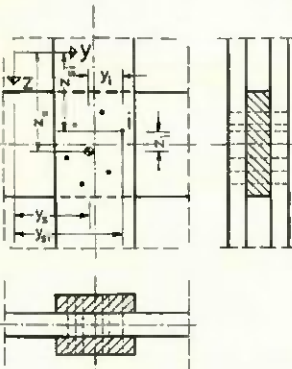
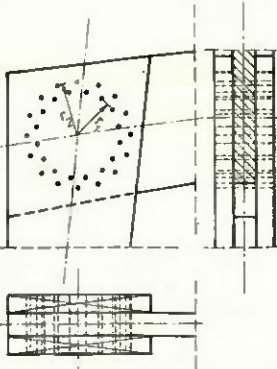
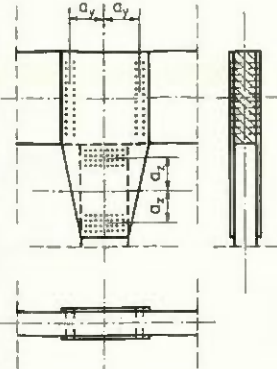
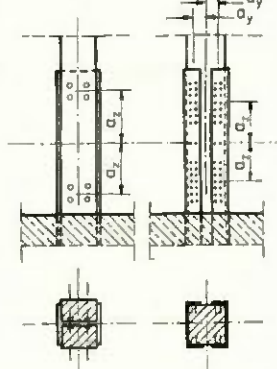
In der derzeit geltenden Norm werden die Nachgiebigkeiten der Verbindungen nur für die Bemessung der aus einzelnen Vollholzteilen zusammengesetzten Biegeträger, der zusammengesetzten, nicht gespreizten Druckstäbe mit kontinuierlicher Verbindung und der Rahmen- und Gitterstäbe sowie für eine genauere Verformungsberechnung von Fachwerkträgern durch einen nur von der Verbindungsmittelart abhängigen Verschiebungsmodul C bzw. einen Faktor c berücksichtigt.

Die für diese Berechnungen in DIN 1052 angegebenen Verschiebungsmoduln sind aus Traglastversuchen an Biegeträgern und Druckstäben ermittelt worden.

Für Berechnungen nach der Spannungstheorie II. Ordnung werden außer den genannten Nachgiebigkeiten auch die Verschiebungsgrößen an Stützeinspannungen und Rahmenecken zur Ermittlung der Federsteifigkeiten an den Knotenpunkten benötigt. Diese Nachgiebigkeiten der verschiedenen Anschlüsse können z. Z. nur näherungsweise mit den Verschiebungsmoduln der DIN 1052 ermittelt werden. Formeln für die verschiedenen Drehfedersteifigkeiten c_d sind in *Tabelle 2* zusammengestellt. Die Längs- und Quersteifigkeiten der Anschlüsse sind ggf. zu berücksichtigen.

Zur genaueren Erfassung der Knotenverschiebungsgrößen müßten diesbezügliche Forschungsarbeiten durchgeführt werden. Hierbei sollte auch der Einfluß der Kriechverformungen infolge hoher Dauerlasten auf den Verschiebungsmodul C erfaßt werden.

Tabelle 2: Formeln zur Ermittlung der Drehfederkonstanten c_d für unterschiedliche Anschlüsse

Allgemein	Rahmenecke	Binder ÷ Stütze	Stütze ÷ Fundament																																
																																			
$c_d = \sum_{i=1}^n C_i \cdot r_i^2$ $r_i^2 = y_i^2 + z_i^2$ <p>Anschlußschwerpunkt:</p> $y_s = \frac{\sum_{i=1}^n C_i \cdot y_{si}}{\sum_{i=1}^n C_i}$ $z_s = \frac{\sum_{i=1}^n C_i \cdot z_{si}}{\sum_{i=1}^n C_i}$	<p>Voraussetzungen: $C = \text{const}$ $y_s = 0$ $z_s = 0$</p> <p>Ein Dübelkreis $C_{d1} = C \cdot n_1 \cdot r_1^2$ Zwei Dübelkreise $C_{d2} = C \cdot (n_1 \cdot r_1^2 + n_2 \cdot r_2^2)$</p> <p>$n_{1,2}$ Anzahl der Verbindungsmittel im jeweiligen Dübelkreis</p>	<p>Voraussetzungen: Symmetrische Anordnung der Verbindungsmittel und beidseits gleiche Ausführung $C = \text{const}$; $y_s = 0$ $z_s = 0$</p> $C_d = \frac{C_{d1} \cdot C_{d2}}{C_{d1} + C_{d2}}$ $C_{d1,2} = C \cdot \sum_{i=1}^n r_i^2$ <p>C_{d1} Drehfederkonstante Anschluß Binder-Knotenpl. C_{d2} Drehfederkonstante Anschluß Knotenpl.-Stütze</p> $r_i^2 = \sum_{j=1}^n (y_j^2 + z_j^2) = n \cdot (a_y^2 + a_z^2 + \eta_{y_j} \cdot e_y^2 + \eta_{z_j} \cdot e_z^2)$ <p>n Gesamtanzahl der Verbindungsmittel pro Anschluß e_y Abstand der Verbindungsmittel (const.) in y-Richtung e_z Abstand der Verbindungsmittel (const.) in z-Richtung η_{yz} Faktor in Abhängigkeit von der Reihenanzahl j in y- bzw. z-Richtung</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td>j</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>4</td> <td>5</td> <td>6</td> <td>7</td> <td>8</td> <td>9</td> <td>10</td> <td>11</td> <td>12</td> <td>13</td> <td>14</td> <td>15</td> </tr> <tr> <td>η_{yz}</td> <td>0</td> <td></td> <td>0,25</td> <td>0,66</td> <td>1,25</td> <td></td> <td>2</td> <td>2,916</td> <td>4</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </table>	j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	η_{yz}	0		0,25	0,66	1,25		2	2,916	4							$C_d = C \cdot \sum_{i=1}^n r_i^2$
j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15																				
η_{yz}	0		0,25	0,66	1,25		2	2,916	4																										

5 Berechnungsbeispiel für die Spannungstheorie II. Ordnung und Stabilitätstheorie (ω -Verfahren) mittels des Verschiebungsgrößenverfahrens

Baustoff: Brettschichtholz Güteklasse I

Lasten: $q = 10 \text{ kN/m}$
 $w_d = 1,6 \text{ kN/m}$
 $w_s = 1 \text{ kN/m}$

5.1 System, Lasten und geometrisch bestimmtes Grundsystem

Es wird das in Bild 6 angegebene Tragwerk untersucht.

Querschnitte:

Riegel 5-3-4-7 $b/d = 18/58 \text{ cm}$
 Stiel 5-6, 7-8 $b/d = 18/18 \text{ cm}$
 Stiel 3-1, 4-2 $b/d = 18/36 \text{ cm}$

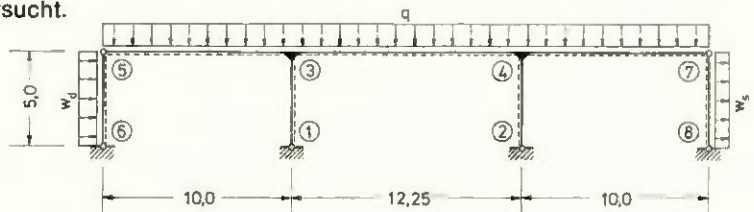


Bild 6: Dreifeldrahmen

Das geometrisch bestimmte Grundsystem mit den Unbekannten ξ_1 , ξ_2 und ξ_3 ist in *Bild 7* dargestellt.

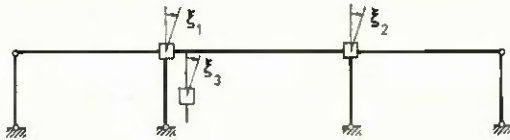


Bild 7: Geometrisch bestimmtes Grundsystem

5.2 Spannungstheorie II. Ordnung

5.2.1 Sicherheitsbeiwert

Es wird ein Sicherheitsbeiwert $\gamma = 2,0$ zugrunde gelegt.

Die Lastgrößen sind mit dem Sicherheitsbeiwert $\gamma = 2,0$ zu multiplizieren.

5.2.2 Vorkrümmung und ungewollte Schrägstellung der Stiele in ungünstiger Richtung

Die maximalen Schnittgrößen für den Stiel 4-2 ergeben sich bei Ansatz der in *Bild 8* gewählten Vorkrümmungen der Stabachsen 4-2 und 3-1.

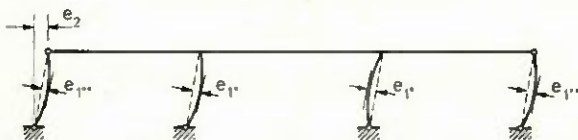


Bild 8: Vorkrümmungen und ungewollte Schrägstellungen

Der Verlauf der Vorkrümmung wird in allen Stielen parabelförmig angesetzt.

Ungewollte Ausmitte: $e_1 = 1,755 \text{ cm}$
 $e_2 = 1,455 \text{ cm}$

Zusätzlich zur ungewollten Ausmitte e_1 wird eine ungewollte Schrägstellung aller Stiele von $\psi = 4,472 \cdot 10^{-3}$ berücksichtigt, so daß sich eine horizontale Kopfpunktverschiebung der Stiele von $e_2 = 2,236 \text{ cm}$ ergibt.

5.2.3 Stabkennzahlen

Aufgrund einer Vorschätzung der Normalkräfte für die ungünstigste Lastfallkombination werden für die Berechnung folgende Stabkennzahlen ε mit ausreichender Genauigkeit zugrunde gelegt:

Stiel 3-1, 4-2:	$\varepsilon_{42} \cong \varepsilon_{31} = 0,9$
Stiel 5-6:	$\varepsilon_{56} = 1,37$
Stiel 7-8:	$\varepsilon_{78} = 1,42$
Riegel 5-3-4-7:	$\varepsilon \cong 0$

5.2.4 Ergebnisse

Die geometrisch Unbestimmten infolge der γ -fachen Lasten unter Berücksichtigung der ungewollten Ausmitte e_1 nach *Bild 8* und der ungewollten Schrägstellung der Stiele ergeben sich zu

$$\begin{aligned} \xi_1 &= 2,5272 \cdot 10^{-3} \\ \xi_2 &= 2,9795 \cdot 10^{-3} \\ \xi_3 &= 18,784 \cdot 10^{-3} \end{aligned}$$

Die Stabendmomente M_{ik}^{II} nach der Spannungstheorie II. Ordnung folgen aus der Überlagerung von Zustand „0“ und Einheitszuständen ξ_i :

$$M_{ik}^{II} = M_{ik}^0 + \sum_{n=1}^i M_{ik}; \xi_n = 1 \cdot \xi_n \quad (8)$$

Der Momentenverlauf infolge γ -facher Lasten unter Berücksichtigung der ungewollten Ausmitte e_1 und der ungewollten Schrägstellung der Stiele ist in *Bild 9* dargestellt, wobei jedoch wegen des Vergleiches mit der Theorie I. Ordnung die durch γ dividierten Momente angegeben sind.

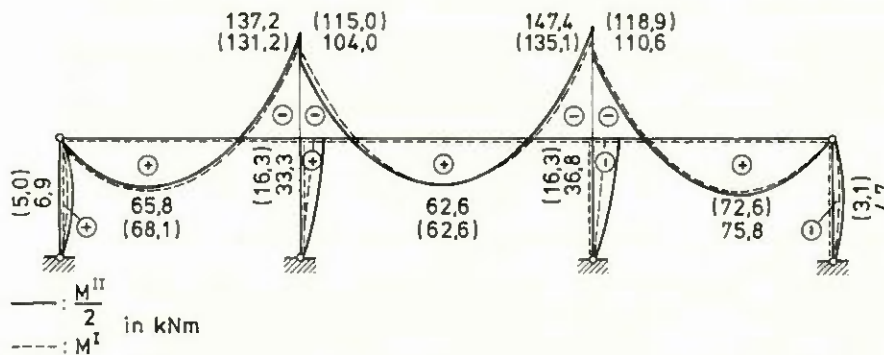


Bild 9: Momentenverlauf

Da die Normalkräfte infolge der ungünstigsten Lastfallkombination

$$\begin{aligned} N_{56} &= - 72,6 \text{ kN} & N_{53} &= - 9,7 \text{ kN} \\ N_{31} &= - 242,8 \text{ kN} & N_{34} &= - 2,0 \text{ kN} \\ N_{42} &= - 251,7 \text{ kN} & N_{47} &= + 6,8 \text{ kN} \\ N_{78} &= - 77,9 \text{ kN} \end{aligned}$$

mit den vorgeschätzten Normalkräften mit ausreichender Genauigkeit übereinstimmen, ist keine neue Rechnung erforderlich.

5.3 Stabilitätstheorie (ω -Verfahren)

5.3.1 Ergebnisse

Die Momente infolge der gegebenen Last nach der Theorie I. Ordnung sind in *Bild 9* dargestellt. Die Normalkräfte ergeben sich zu:

$$\begin{aligned} N_{56} &= - 36,9 \text{ kN} & N_{53} &= - 4,0 \text{ kN} \\ N_{31} &= - 122,7 \text{ kN} & N_{34} &= - 0,75 \text{ kN} \\ N_{42} &= - 124,8 \text{ kN} & N_{47} &= + 2,5 \text{ kN} \\ N_{78} &= - 38,1 \text{ kN} \end{aligned}$$

5.3.2 Ermittlung der Knicklängen

Zur Ermittlung der Knicklängen der einzelnen Stäbe ist der Laststeigerungsfaktor $\text{crit } \nu$ zu bestimmen, für den das in *Bild 10* dargestellte System mit den Lasten

$$\begin{aligned} P_5 &= 36,9 \text{ kN}, \\ P_3 &= 122,7 \text{ kN}, \\ P_4 &= 124,8 \text{ kN} \end{aligned}$$

und $P_7 = 38,1 \text{ kN}$

zum ersten Mal instabil wird. Dies ist der Fall, wenn die geometrisch Unbestimmten ξ_i (s. *Bild 7*) beliebige Werte annehmen können, d. h. wenn die Determinante der Systemsteifigkeitsmatrix (Z_{ik} -Matrix) zu Null wird.

Für verschiedene Laststeigerungsfaktoren ν ist der Wert der Determinante der Systemsteifigkeitsmatrix zu ermitteln. Die Ergebnisse sind in *Bild 11* dargestellt.

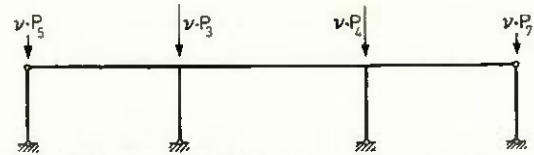


Bild 10: System und Lasten für Knicklängenermittlung

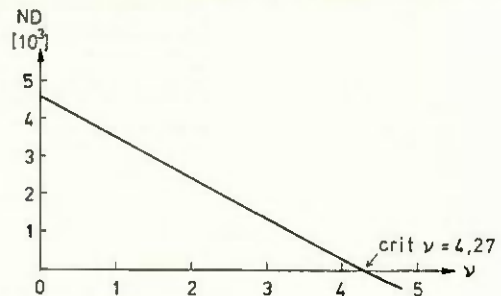


Bild 11: Ermittlung von $\text{crit } \nu$

Für das Systemknicken ergibt sich ein Wert $\text{crit } \nu = 4,27$. Die Querschnitte der Stiele 5-6 und 7-8 sind wegen des Einzelstabknickens so zu wählen, daß sich für diese Stiele ein $\text{crit } \nu > 4,27$ ergibt.

Mit $P_4 = 124,8 \text{ kN}$ berechnet sich die maßgebende Knicklänge für den Stab 4-2 zu

$$s_k = \pi \sqrt{\frac{EI}{\text{crit } \nu \cdot P_4}} = 11,94 \text{ m.}$$

Daraus folgt ein Knicklängenbeiwert $\beta = 2,39$.

5.4 Vergleich der Ergebnisse nach der Spannungstheorie II. Ordnung mit der Stabilitätstheorie (ω -Verfahren)

Die durch γ dividierten Momente nach der Spannungstheorie II. Ordnung unterscheiden sich von den Momenten nach der Theorie I. Ordnung im Stiel 4-2 erheblich ($2,26 \cdot M_{42}^I$), während im Riegel die Abweichungen wesentlich kleiner sind (Riegel $4_1 : 1,09 M_{43}^I$).

In *Tabelle 3* sind die Bemessungsschnittgrößen nach

Tabelle 3: Bemessungsschnittgrößen nach der Spannungstheorie II. Ordnung und der Theorie I. Ordnung für den Anschluß Stiel 4-2 an den Riegel

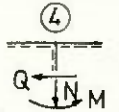
	Spannungstheorie II. Ordnung ($\gamma = 2,0$ + Schrägstellung + Vorkrümmung)	Theorie I. Ordnung	Verhältnis der Schnittgrößen $\frac{\text{Spannungstheorie II. Ordnung}}{\text{Theorie I. Ordnung}}$
M [kNm]	$\frac{M^{II}}{2,0} = - \frac{73,5}{2,0} = - 36,75$	- 16,25	2,26
Q [kN]	$\frac{Q^{II}}{2,0} = \frac{8,84}{2,0} = 4,42$	3,25	1,36
N [kN]	$\frac{N^{II}}{2,0} = - \frac{251,7}{2,0} = - 125,85$	- 124,80	1,008

Tabelle 4: Vergleich der Ergebnisse nach der Spannungstheorie II. Ordnung mit der Stabilitätstheorie (ω -Verfahren)

		1	2	3	4	5	6	7
	Ort	Spannungstheorie II. Ordnung			Stabilitätstheorie (ω -Verfahren)	Spannungstheorie II. Ordnung Stabilitätstheorie (ω -Verfahren)		
		$\gamma = 2,0$ + Schrägstellung + Vorkrümmung	$\gamma = 2,0$ + Schrägstellung	$\gamma = 2,0$		$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$
Riegel	4 ₁	0,9481	0,9442	0,9188	0,8693	1,091	1,086	1,057
Stiel	4-2	0,8517	0,8197	0,7025	0,9938	0,857	0,825	0,707
	5-6	0,6067		0,5596	0,6604	0,919		0,847
	7-8	0,4526		0,3986	0,5325	0,850		0,749

der Spannungstheorie II. Ordnung (durch γ dividiert) und der Theorie I. Ordnung für den Anschluß Stiel 4-2 an den Riegel zusammengestellt. Es zeigt sich, daß eine Bemessung des Anschlusses für die Schnittgrößen nach der Theorie I. Ordnung auf der „unsicheren“ Seite liegt.

Für den Spannungsnachweis (s. Tabelle 4) ist aus Gründen der Übersichtlichkeit nicht zwischen Lastfall H und HZ unterschieden, sondern es sind die zulässigen Spannungen für den Lastfall H zugrunde gelegt worden. Weiterhin sind für den Riegel wegen der Durchlaufwirkung die zulässigen Werte für die Biegespannung um 10% erhöht worden.

Der Vergleichswert nach Gl. (7) für den Stiel 4-2 von 0,8517 setzt sich aus folgenden Anteilen zusammen:

- 0,7025 infolge γ -facher Last (\triangleq 82,48%)
- 0,1172 infolge ungewollter Schrägstellung der Stiele (\triangleq 13,76%)
- 0,032 infolge Vorkrümmung der Stiele (\triangleq 3,76%).

Bei dem Vergleichswert für den Stiel 7-8 von 0,4526 ergeben sich folgende Anteile:

- 0,3986 infolge γ -facher Last (\triangleq 88,07%)
- 0,054 infolge Vorkrümmung der Stiele (\triangleq 11,93%).

Der Vergleichswert für den Stiel 4-2 nach der Spannungstheorie II. Ordnung von 0,8517 unterscheidet sich von dem Vergleichswert nach der Stabilitätstheorie (ω -Verfahren) um 0,1421 (\triangleq 16,7%). Für den Stiel 7-8 beträgt der Unterschied 17,6%. Die Bemessung nach der Spannungstheorie II. Ordnung ist in diesen Fällen wirtschaftlicher als die nach der Stabilitätstheorie (ω -Verfahren).

Im Riegel an der Stelle 4₁ dagegen ist der Vergleichswert nach der Spannungstheorie II. Ordnung von 0,9481 um 0,0788 (\triangleq 8,3%) höher als nach der Stabilitätstheorie (ω -Verfahren).

6 Formelzusammenstellung

Für eingespannte Stützen (ohne und mit angehängten Pendelstützen) sowie Zweigelenrahmen sind Formeln zur Ermittlung der Einspannmomente bzw. der Momente in der maßgebenden Rahmenecke nach der Spannungstheorie II. Ordnung infolge γ -facher Last, Vorkrümmung und ungewollter Schrägstellung der Stiele unter Berücksichtigung drehelastischer Nachgiebigkeit der Stützeinspannung bzw. der Rahmenecken in Tabelle 5 angegeben.

Die Verfasser beabsichtigen, die in Tabelle 5 angegebenen Momente nach der Spannungstheorie II. Ordnung noch für den praktischen Gebrauch aufzubereiten, z. B. Angabe von Grenzwerten für den Einfluß der Vorkrümmung und der Drehfedersteifigkeit auf die Momente.

Es ist ferner vorgesehen, die Momente auch für weitere im Holzbau übliche Tragwerksysteme zu verschiedenen Lastfällen anzugeben.

7 Zusammenfassung

Die Annahmen für die Anwendung der Spannungstheorie II. Ordnung werden erläutert und diskutiert.

An einem Beispiel wird die Berechnung nach der Spannungstheorie II. Ordnung und der Stabilitätstheorie (ω -Verfahren) durchgeführt. Dabei wird der Einfluß der γ -fachen Last, der Vorkrümmung und der ungewollten Schrägstellung der Stiele untersucht.

Tabelle 5: Formeln zur Ermittlung der Momente nach der Spannungstheorie II. Ordnung

System und Lasten	M_{ik}^{II} nach der Spannungstheorie II. Ordnung	
	$M_{01}^{II} = - \frac{\gamma \cdot H \cdot h + N \cdot e_2 - f_{vk} \cdot \frac{8 \cdot N \cdot e_1 (1 - \epsilon / \tan \epsilon)}{\epsilon^2}}{1 - N \cdot h \cdot \left(\frac{1}{c_h^*} + \frac{1}{c_d} \right)}$ <p>mit $N = \gamma \cdot P$</p>	
	$M_{01}^{II} = - \frac{\gamma \cdot \frac{w \cdot h^2}{2} \cdot \left(1 + f_w \cdot \frac{N \cdot h}{c_h^*} \right) + N \cdot e_2 - f_{vk} \cdot \frac{8 \cdot N \cdot e_1 (1 - \epsilon / \tan \epsilon)}{\epsilon^2}}{1 - N \cdot h \cdot \left(\frac{1}{c_h^*} + \frac{1}{c_d} \right)}$ <p>mit $N = \gamma \cdot P$</p>	
	$M_{01}^{II} = - \frac{\gamma \cdot H \cdot h + N \cdot e_2 \cdot \left(1 + \frac{n \cdot N_1}{N} \right) - f_{vk} \cdot \frac{8 \cdot N \cdot e_1 (1 - \epsilon / \tan \epsilon)}{\epsilon^2}}{1 - N \cdot h \cdot \left(1 + \frac{n \cdot N_1}{N} \right) \cdot \left(\frac{1}{c_h^*} + \frac{1}{c_d} \right)}$ <p>mit $N = \gamma \cdot P$ und $N_1 = \gamma \cdot P_1$</p>	
	$M_{01}^{II} = - \frac{\gamma \cdot \frac{w \cdot h^2}{2} \cdot \left(1 + f_w \cdot \frac{N \cdot h}{c_h^*} \right) + N \cdot e_2 \cdot \left(1 + \frac{n \cdot N_1}{N} \right) - f_{vk} \cdot \frac{8 \cdot N \cdot e_1 (1 - \epsilon / \tan \epsilon)}{\epsilon^2}}{1 - N \cdot h \cdot \left(1 + \frac{n \cdot N_1}{N} \right) \cdot \left(\frac{1}{c_h^*} + \frac{1}{c_d} \right)}$ <p>mit $N = \gamma \cdot P$ und $N_1 = \gamma \cdot P_1$</p>	
	$M_{23}^{II} = - \left[\frac{\gamma \cdot \frac{H \cdot h}{2} + N_m \cdot e_2}{1 - N_m \cdot h \cdot \left(\frac{1}{c_h^*} + \frac{1}{2 \cdot c_1^*} + \frac{1}{c_d} \right)} + \frac{\gamma \cdot q \cdot l^2}{3 + 2 \cdot c_1^* \cdot \left(\frac{1}{c_h^*} + \frac{1}{c_d} \right)} - f_{vk} \cdot \frac{8 \cdot e_1 \cdot (1 - \epsilon / \tan \epsilon)}{\epsilon^2 \cdot h \cdot \left(\frac{1}{c_h^*} + \frac{3}{2 \cdot c_1^*} + \frac{1}{c_d} \right)} \right]$ <p>mit $N_m = (N_{01} + N_{23}) / 2$</p>	
Abkürzungen und Annahmen:		
γ Sicherheitsbeiwert ϵ Stabkennzahl $c_h^* = \frac{\epsilon^2 \cdot E \cdot I_h}{h \cdot (1 - \epsilon / \tan \epsilon)}$ $c_1^* = \frac{3 \cdot E \cdot I_1}{l}$; ($\epsilon = 0$ gesetzt) c_d Drehfederkonstante ($c_d > 0$) $c_d \Rightarrow \infty$, starre Einspannung	$E \cdot A \Rightarrow \infty$ I_h Flächenmoment 2. Grades des Stieles I_1 Flächenmoment 2. Grades des Riegels n Anzahl der Pendelstützen $f_{vk} = \frac{(\cos \epsilon + \epsilon \cdot \sin \epsilon - \epsilon^2 / 2 - 1) \cdot \sin \epsilon}{\epsilon \cdot \cos \epsilon - \sin \epsilon} - 1 + \cos \epsilon$ $f_w = \frac{1}{\epsilon} \cdot \frac{2 \cdot (1 - \cos \epsilon) - \epsilon \cdot \sin \epsilon}{\epsilon \cdot \cos \epsilon - \sin \epsilon}$	<p>e_1 ungewollte Ausmitte (parabelförmige Vorkrümmung) e_2 ungewollte Schrägstellung der Stiele</p>

Die Spannungstheorie II. Ordnung führt in der Regel zu wirtschaftlicheren Abmessungen als die Stabilitätstheorie.

Ein weiterer Vorteil bei einer Rechnung nach der Spannungstheorie II. Ordnung ist, daß sich Bemessungsschnittgrößen für Stöße und Anschlüsse ergeben, während die Stabilitätstheorie über diese Schnittgrößen keine Aussage zuläßt. Wie das Beispiel zeigt, liegt eine Bemessung der Stöße und Anschlüsse für druckbeanspruchte Bauteile nach der Theorie I. Ordnung auf der „unsicheren“ Seite.

Weiterhin sind für verschiebliche Tragwerksysteme Formeln für die Momente nach der Spannungstheorie II. Ordnung infolge γ -facher Last, Vorkrümmung und ungewollter Schrägstellung der Stiele unter Berücksichtigung der elastischen Drehnachgiebigkeit der Anschlüsse angegeben.

In einer Tabelle sind Formeln zur Ermittlung der Drehfederkonstanten für unterschiedliche Anschlüsse zusammengestellt.

Für die praktische Anwendung der Spannungstheorie II. Ordnung im Holzbau sind jedoch noch eine Reihe von Untersuchungen erforderlich, um den in der Praxis tätigen Ingenieuren weitere Berechnungshilfen und vereinfachende Annahmen zur Verfügung zu stellen.

Schrifttum

- [1] Möhler, K., J. Ehlbeck, G. Hempel und P. Köster: Erläuterungen zu DIN 1052, Blatt 1 und 2 – Holzbauwerke – Ausg. Okt. 1969, Bruderverlag Karlsruhe 1971.
- [2] Heimeshoff, B.: Anwendung der Theorie II. Ordnung im Holzbau. Holzbauseminar der Arbeitsgemeinschaft Holz e. V. 1981.
- [3] Petersen, C.: Knicklängen biegesteifer Stabtragwerke. Bautechnik 11 (1971) S. 387/392 und 1 (1972) S. 14/20.
- [4] Cassens, J.: Theorie II. Ordnung im Holzbau. Bautechnik 7 (1974) S. 244/249.
- [5] Dimitrov, N. S.: Die nichtlineare Theorie im Holzbau. Bauingenieur 51 (1976) S. 205/210.
- [6] Heimeshoff, B.: Rahmenkonstruktionen, Holzbauseminar 1978.
- [7] Pischl, R.: Holzbau (mit kritischen Betrachtungen und neuen Vorschlägen zur Bemessung nach Theorie I. und II. Ordnung). Heft 2, Institut für Stahlbau, Holzbau und Flächen-tragwerke der TU Graz, 1980.
- [8] Pischl, R.: Zur Theorie II. Ordnung im Holzbau. Bauingenieur 54 (1979) S. 255/260.
- [9] Franz, J., G. Hees, F.-J. Hilbers, U. Kraft und G.-W. Miske: Theorie II. Ordnung und ihre Anwendung im Bauwesen. Ber. 1, 2. Aufl., Fachgebiet Statik der Baukonstruktionen der TU Berlin, 1980.